

Exercice Printemps 07

Algèbre linéaire / Equations différentielles

Exercice 1 Suite de l'exercice de mercredi. On considère

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x - y + z \\ -x + 3y - 2z \\ -2x + 6y - 4z \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Im}(f)$. A-t-on l'inclusion réciproque ?
2. Soit $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B}_u = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de \mathbb{R}^3 .
3. Calculer $f^3(\mathcal{B}_u)$.
4. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 Résoudre sur \mathbb{R} , (E) : $y' - 2ty = e^{t+t^2}$.