Exercice Printemps n°7 : 21/04/24

1. Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x-y+z \\ -x+3y-2z \\ -2x+6y-4z \end{bmatrix} \end{matrix}$

Montrons que $Ker(f) \subseteq Im(f)$. Soit $x \in Ker(f)$. On sait que $Ker(f) = Vect\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$, $Im(f) = Vect\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$, de plus la dimension du noyau et de l'image de f sont $\dim(Ker(f)) = 1$ et $\dim(Im(f)) = 2$.

Comme $\dim(Ker(f)) < \dim(Im(f))$ $\boxed{Ker(f) \subseteq Im(f)}$ A démontrer !

Utile pour la deuxième partie de la question.

Nous n'avons pas l'inclusion réciproque car les vecteurs de $Im(f)$ ne sont pas des multiples du vecteur de $Ker(f)$.

Donc $\boxed{Im(f) \subseteq Ker(f) \text{ n'est pas vérifiée}}$

2. Soit $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Posons $B_u = (u, f(u), f^2(u))$, alors :

$$B_u = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, f(f(u))\right) \quad \text{oui}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ \cancel{6} \end{pmatrix}\right)$$

On peut donc faire :

$$Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$$

Les opérations élémentaires...

$$= \cancel{\Leftrightarrow} Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}\right) \quad C_1 \leftrightarrow C_2$$

$$\Leftrightarrow Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}\right) \quad C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1$$

$$\Leftrightarrow Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 - 3C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 4C_2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}\right) \quad C_1 \leftarrow C_1 - \frac{1}{3}C_3$$

$$\Leftrightarrow Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{matrix} C_1 \leftarrow -C_1 \\ C_3 \leftarrow \frac{1}{18}C_3 \end{matrix}$$

On reconnaît la base canonique de $\mathbb{R}^3$ oui

Conclusion : B_u est une base de $\mathbb{R}^3$.   A rédiger davantage, il manque un argument.

3. On sait que $f^3(B_u) = f(f(f(B_u)))$. On commence par calculer :

$f(B_u) = \left(\begin{pmatrix}3\\-6\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\6\\30\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-14\\12\\60\end{pmatrix}\right)$ OK à reprendre avec le bon $f^2(u)$.

Puis $f(f(B_u)) = f\left(\begin{pmatrix}3\\-6\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\6\\30\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-14\\12\\60\end{pmatrix}\right)$

$=$

Exercice 2 :

Soit $(E) : y' - 2ty = e^{t+t^2}$, son équation homogène associée est

$(E_0) : \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) - 2t\,y(t) = 0$ ✓

La solution générale est de la forme $y_h(t) = Ce^{t^2}$ ✓ avec C une constante ✓ $\mathcal{S}_0 = \dots$

On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}$ $y_p(t) = v(t)e^{t^2}$ avec v une fonction à déterminer.

On a alors $y_p'(t) = v'(t)e^{t^2} + 2te^{t^2}v(t)$ dérivabilité ?

On réinjecte dans l'équation initiale :

$\forall t \dots$ $y_p'(t) - 2ty_p(t) = v'(t)e^{t^2} + 2te^{t^2}v(t) - 2tv(t)e^{t^2} = v'(t)e^{t^2}$

donc $\forall t \dots$ $v'(t)e^{t^2} = e^{t+t^2}$ ✓ $\Leftrightarrow \forall t \dots$ $v'(t) = e^t$

On intègre des deux côtés : $\left(\int v'(t)\,dt = \int e^t\,dt\right) \Leftrightarrow \exists \dots \forall t \dots$ $v(t) = e^t + C$

~~La~~ Une solution particulière est donc : $y_p(t) = e^{t+t^2} + Ce^{t^2}$

On a alors la solution générale :

$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \Leftrightarrow \boxed{y(t) = e^{t+t^2} + 2Ce^{t^2}}$ Bien !