Correction de l'exercice Printemps 07
Algèbre linéaire / Equations différentielles

Solution de l'exercice 1

1. On observe que
$$\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Im}\,(f)\,.$$
Donc $\mathrm{Im}\,(f)$ est un espace vectoriel contenant $\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$. Or $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$. Conclusion,
$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right) \subseteq \mathrm{Im}\,(f)\,.}$$
Cependant, $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 1 < 2 = \dim(\mathrm{Im}\,(f))$ donc $\mathrm{Ker}\,(f) \neq \mathrm{Im}\,(f)$. Conclusion,
$$\boxed{\text{L'inclusion réciproque est fausse.}}$$

2. Soit $u = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$. Calculons :
$$f\,(u) = \begin{bmatrix}-1\\3\\6\end{bmatrix}.$$
Puis,
$$f^2\,(u) = f\,(f(u)) = f\left(\begin{bmatrix}-1\\3\\6\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1-3+6\\-(-1)+9-12\\-2(-1)+18-24\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\\-4\end{bmatrix}.$$
Donc
$$\mathscr{B}_u = \left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\3\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-2\\-4\end{bmatrix}\right)$$
Méthode 1. Montrons que $\mathscr{B}_u$ est libre. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$a\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}-1\\3\\6\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}2\\-2\\-4\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} -b+2c=0 \\ a+3b-2c=0 \\ 6b-4c=0 \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+3b-2c=0 \\ -b+2c=0 \\ 6b-4c=0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+3b-2c=0 \\ -b+2c=0 \\ 8c=0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3+6L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad a=b=c.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}_u$ est libre. De plus,

$$\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_u) = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_u \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Méthode 2. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_u) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\3\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-2\\-4\end{bmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\3\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-2\\-4\end{bmatrix}\right) && C_1 \leftrightarrow C_2 \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\-4\end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - 3C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2 \end{array} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\8\end{bmatrix}\right) && C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1 \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_3 \leftarrow \tfrac{1}{8}C_3 \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_1 \leftarrow 6C_3 - C_1 \\
&= \mathbb{R}^3 \qquad \text{car on reconnait la base canonique de } \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}_u$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. De plus,

$$\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_u) = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_u \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

3. On a

$$f^3(\mathscr{B}) = \left(f^3(u), f^3(f(u)), f^3\left(f^2(u)\right)\right) = \left(f^3(u), f^4(u), f^5(u)\right).$$

Or on a vu que

$$f^2(u) = \begin{bmatrix}2\\-2\\-4\end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\,(f).$$

Donc $f^3(u) = f(f(u)) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Puis, f étant linéaire,

$$f^4(u) = f\left(f^3(u)\right) = f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} \text{ et de même } f^5(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f^3(\mathscr{B}_u) = (0_{\mathbb{R}^3}, 0_{\mathbb{R}^3}, 0_{\mathbb{R}^3}).}$$

4. On sait qu'une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base. Ainsi, l'égalité $f^3(\mathscr{B}_u) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}(\mathscr{B}_u)$ implique nécessairement que

$$\boxed{f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}.}$$

Solution de l'exercice 2 Soit $(E_0) : \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) - 2ty(t) = 0$ l'équation homogène associée à (E). La fonction $a : t \mapsto -2t$ est continue sur **l'intervalle** $\mathbb{R}$. Donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$ dont l'une est donnée par $A : t \mapsto -t^2$. Donc (E_0) admet des solutions sur $\mathbb{R}$ données par l'ensemble

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{t^2} \end{array} \middle|\ C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{t^2} \end{array} \right).$$

Posons $y_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{t^2} \end{array}$. Par ce qui précède, $y_0 \in \mathscr{S}_0$. Fixons $y \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et posons $\lambda = \frac{y}{y_0}$ qui est bien définie sur $\mathbb{R}$ car y_0 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont. Par suite, on a, en notant $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E),

$$\begin{array}{llll}
y \in \mathscr{S} & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, & (\lambda\, y_0)'(t) - 2t\,(\lambda\, y_0)(t) = \mathrm{e}^{t+t^2} \\
& \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, & \lambda'(t)y_0(t) + \underbrace{\lambda(t)y_0'(t) - 2t\,\lambda(t)y_0(t)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0} = \mathrm{e}^{t+t^2} \\
& \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, & \lambda'(t)y_0(t) = \mathrm{e}^{t+t^2} \\
& \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, & \lambda'(t)\,\mathrm{e}^{t^2} = \mathrm{e}^{t+t^2} \\
& \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, & \lambda'(t) = \mathrm{e}^{t} \qquad \text{car } \mathrm{e}^{t^2} \neq 0 \\
& \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, & \lambda(t) = \mathrm{e}^{t} + C \\
& \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, & y(t) = \lambda(t)y_0(t) = \left(\mathrm{e}^{t} + C\right)\mathrm{e}^{t^2}.
\end{array}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\mathrm{e}^{t} + C)\,\mathrm{e}^{t^2} \end{array} \middle|\ C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{t+t^2} \end{array} \right\} + \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{t^2} \end{array} \right).}$$