

Exercice Printemps 08

Séries / Matrices

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto e^x \cos(x) - e^x \sin(x) - e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. Déterminer un équivalent simple de $f : x \mapsto e^x \cos(x) - e^x \sin(x) - e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x)$ au voisinage de 0.
2. En déduire la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A$.
2. En déduire que A est inversible et préciser A^{-1} .
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
4. En déduire les puissances de A .