

## Exercice Printemps 08

### Séries / Matrices

**Exercice 1** Soit  $f : x \mapsto e^x \cos(x) - e^x \sin(x) - e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x)$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ .

1. Déterminer un équivalent simple de  $f : x \mapsto e^x \cos(x) - e^x \sin(x) - e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x)$  au voisinage de 0.
2. En déduire la nature de  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ .

**Exercice 2** Soit  $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2 - 3A$ .
2. En déduire que  $A$  est inversible et préciser  $A^{-1}$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 3X + 2$ .
4. En déduire les puissances de  $A$ .