Exercice Printemps 08
Séries / Matrices

Exercice 1 :

1. Je pose $f : x \longmapsto 2(\cos(x)\,sh(x) - \sin(x)\,ch(x))$ oui !

Je fais un développement limité en 0 à l'ordre 5 de f : ✓

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 2\Big(\Big(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\Big)\times\Big(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\Big) - \Big(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\Big)\times\Big(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\Big)\Big)$$ oui

$$= 2\Big(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{12}+\frac{x^5}{\cancel{120}\ 24}-x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{12}-\frac{x^5}{24}+o(x^5)\Big)$$

$$= 2\Big(-\frac{x^3}{8}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{24}\Big) = -\frac{2}{3}x^3-\frac{x^5}{15}+o(x^5).$$

Incohérent.

Un équivalent simple de f au voisinage de 0 est $-\frac{2}{3}x^3$.

2. $U_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\cancel{U_n}$ $\frac{1}{n}$ tend vers 0.

Il manque un théorème !!

Donc $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{3}\times\frac{1}{n^3}$ (!). Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ converge comme série de Riemann d'exposant $\alpha = 3 > 1$

Exercice 2 :

1. On a $A^2 - 3A = \begin{pmatrix}7&5\\-6&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&5\\-6&-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}21&15\\-18&-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19&15\\-18&-10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}21&15\\-18&-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix} = -2\,I_2$ oui

2. Ici on observe que $A\times(A-3I_E) = -2\,I_E$, donc ✓

$$A\times\left(-\frac{A-3I_E}{2}\right) = I_E.$$ ✓

A^{-1} est inversible et

Donc $-\frac{(A-3I_E)}{2} = A^{-1}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}-2&-2{,}5\\3&3{,}5\end{pmatrix}$$

$-\frac{5}{2}$; $\frac{7}{2}$

À encadrer.

$$\begin{pmatrix} -2 & -2{,}5 \\ 3 & 3{,}5 \end{pmatrix}$$

$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_E$ OK ! Bien.

3. On a $X^n = (X^2 - 3X + 2) \times Q_n + aX + b$

Pour $x = 1$ on a $1 = 0 \times Q_n + a + b$

$a + b = 1$ ✓

Pour $x = 2$ on a $2^n = 2a + b$ ✓

Donc $2^n = 2 - 2b + b \Rightarrow b = -2^n + 2$ ✓ et $a = 2^n - 1$ ✓

Donc $X^n = (X^2 - 3X + 2) Q_n + aX + b$ avec

$a = 2^n - 1$ et $b = -2^n + 2$. ✓

Le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$

vaut donc $(2^n - 1)X + 2 - 2^n$. A encadrer.

4. On a donc :

$$A^n = \underbrace{(A^2 - 3A + 2Id_E)}_{= O_2} \times Q_n(A) + 2^n \times A - A + 2Id_E - 2^n Id_E.$$

A reprendre.

$$A^n = A^2 - 4A + 4Id_E + 2^n (A - Id_E).$$