Correction de l'exercice Printemps 08
Séries / Matrices

Solution de l'exercice 1

1. On note que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \cos(x)\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) - \sin(x)\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) = 2\,\mathrm{sh}(x)\cos(x) - 2\,\mathrm{ch}(x)\sin(x).$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x) &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\\
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\\
\mathrm{ch}(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\\
\mathrm{sh}(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} 2\left(x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) - 2\left(1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 2x - x^3 + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) - 2x + \frac{x^3}{3} - x^3 + o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{4x^3}{3} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{4x^3}{3}.}$$

2. Quand $n \to +\infty$, on a $\frac{1}{n} \to 0$. Donc par la question précédente,

$$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{4}{3n^3}.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{4}{3n^3} < 0$ et est donc de signe constant. Donc par le théorème sur les équivalents des séries à termes négatifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\frac{4}{3n^3}$ sont de même nature. Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\frac{4}{3n^3}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 3 > 1$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. On a les égalités entre matrices suivantes :
$$\begin{aligned} A^2-3A &= \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19 & 15 \\ -18 & -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 & 15 \\ -18 & -12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{A^2-3A=-2I_2.}$$
2. Par la question précédente,
$$A\left(-\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}I_2\right)=I_2.$$
Posons $B=-\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}I_2$. Alors $AB=I_2$. Conclusion,
$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1}=-\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}I_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.}$$
3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Par le théorème de la division euclidienne pour les polynômes, il existe $(Q_n,R_n)\in\mathbb{R}[X]^2$ tel que $X^n=(X^2-3X+2)\,Q_n+R_n$ et $\deg(R_n)<\deg(X^2-3X+2)=2$. Donc $\deg(R_n)\leqslant 1$ et donc il existe $(a_n,b_n)\in\mathbb{R}^2$ tel que $R_n=a_nX+b_n$. Ainsi,
$$X^n=\left(X^2-3X+2\right)Q_n+a_nX+b_n.$$
Observe que 1 et 2 sont les deux racines de X^2-3X+2. Donc en évaluant en 1 et en 2, on obtient
$$\begin{cases} 1=a_n+b_n \\ 2^n=2a_n+b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n+b_n=1 \\ 2a_n+b_n=2^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n+b_n=1 \\ a_n=2^n-1 \end{cases} \quad L_2\leftarrow L_2-L_1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_n=1-a_n=2-2^n \\ a_n=2^n-1 \end{cases}.$$
Conclusion, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^n par X^2-3X+2 est donné par
$$\boxed{R_n=(2^n-1)\,X+2-2^n.}$$
4. Par la question précédente,
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \exists Q_n\in\mathbb{R}[X],\qquad X^n=\left(X^2-3X+2\right)Q_n+(2^n-1)\,X+2-2^n.$$
Soit $n\in\mathbb{N}$. En évaluant en A, on obtient,
$$A^n=\left(A^2-3A+2I_2\right)Q_n(A)+(2^n-1)\,A+(2-2^n)\,I_2.$$
Or $A^2-3A+2I_2=0_2$. Donc
$$\begin{aligned} A^n=(2^n-1)\,A+(2-2^n)\,I_2 &= (2^n-1)\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}+(2-2^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6\times 2^n-5 & 5\times(2^n-1) \\ -6\times(2^n-1) & -5\times 2^n+6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = (2^n - 1)\,A + (2 - 2^n)\,I_2 = \begin{pmatrix} 6 \times 2^n - 5 & 5 \times (2^n - 1) \\ -6 \times (2^n - 1) & -5 \times 2^n + 6 \end{pmatrix}.}$$

NB : on peut vérifier que ce résultat reste juste pour $n = -1$, on retrouve alors l'inverse de A !