Correction de l'exercice Printemps 09
Probabilités / Analyse asymptotique

Solution de l'exercice 1 Notons A l'évènement « Aly tire » alors $\overline{A}$ est l'évènement « Seydina tire ».

1. La cible est atteinte ou non. Donc $X(\Omega) = [\![0;1]\!]$ et donc X suit une loi binomiale. Calculons son paramètre $p = \mathbb{P}(X=1)$. La famille $\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,
$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=1 \mid A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(X=1 \,\middle|\, \overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right).$$
D'après l'énoncé, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \frac{1}{3}$. De plus, Aly touche la cible 9 fois sur 10 : $\mathbb{P}(X=1 \mid A) = \frac{9}{10}$ et Seydina 6 fois sur 10, $\mathbb{P}\left(X=1 \,\middle|\, \overline{A}\right) = \frac{6}{10}$. D'où,
$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{6}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}.$$
Conclusion,
$$\boxed{X \sim \mathscr{B}\left(\frac{7}{10}\right).}$$

2. On chercher $\mathbb{P}\left(\overline{A} \,\middle|\, X=1\right)$. Puisque $(X=1)$ est non négligeable, par la formule de Bayes, on a
$$\mathbb{P}\left(\overline{A} \,\middle|\, X=1\right) = \frac{\mathbb{P}\left(X=1 \,\middle|\, \overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)}{\mathbb{P}(X=1)}.$$
Si Seydina tire, il a 6 chances sur 10 d'atteindre la cible : $\mathbb{P}\left(X=1 \,\middle|\, \overline{A}\right) = \frac{6}{10}$. Seydina a deux chances sur trois de tirer : $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \frac{2}{3}$. Enfin, par la question précédente, $\mathbb{P}(X=1) = \frac{7}{10}$. D'où,
$$\mathbb{P}\left(\overline{A} \,\middle|\, X=1\right) = \frac{\frac{6}{10} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}\left(\overline{A} \,\middle|\, X=1\right) = \frac{4}{7}.}$$

Solution de l'exercice 2 Pour tout $n \geqslant 1$, on a
$$u_n = \ln\left(\mathrm{e}^{2n}\right) + \ln\left(1 + n\,\mathrm{e}^{-2n}\right) - 2n\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \qquad \text{car } n \geqslant 0.$$
Or par croissance comparée, $h = n\,\mathrm{e}^{-2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} h + o(h)$. De plus, comme $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a aussi, $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par conséquent,
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 2n + n\,\mathrm{e}^{-2n} + o\left(n\,\mathrm{e}^{-2n}\right) - 2n\left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\,\mathrm{e}^{-2n} + o\left(n\,\mathrm{e}^{-2n}\right) - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
Par croissance comparée, on a $n^2\,\mathrm{e}^{-2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. $n\,\mathrm{e}^{-2n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc aussi $o\left(n\,\mathrm{e}^{-2n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi,
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
Conclusion,
$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}.}$$