

Exercice Printemps 10

Intégration / Continuité-dérivabilité

Exercice 1 *Un exercice deux-en-un.*

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{t-1}{t} \leq \ln(t) \leq t-1.$$

3. En déduire que f est prolongeable par continuité en 1. On notera encore f la nouvelle fonction prolongée.
4. Montrer que la fonction prolongée est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .