Exercice Printemps 10

Intégration / continuité - dérivabilité.

Exercice 1:

on pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$,

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$$

1) ~~Soit~~

~~$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe $\iff \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$ existe~~

~~$\iff \begin{cases} t > 0 & \text{car } \ln(t) \text{ continue sur }]0, +\infty[\\ t \neq 1 & \text{car } \frac{1}{\ln(t)} \text{ continue} \end{cases}$~~

~~$\iff x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$~~

~~2)~~ 1) Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe $\iff \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$ existe

$\iff$ $t \mapsto$ $\frac{1}{\ln(t)}$ continue et existe sur ...

or $\ln(t)$ existe et est continue sur $]0 ; +\infty[$ ✓

de plus $x \mapsto \frac{1}{x}$ continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Mal dit

donc $\frac{1}{\ln(t)}$ existe et est continue $\iff \begin{cases} t \in \mathbb{R}_+^* \\ \ln(t) \neq 0 \end{cases}$

$\iff t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

donc $\boxed{f(x) \text{ existe} \iff x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}}$

Non revoir le raisonnement

2) Montrons que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{t-1}{t} \leq \ln(t) \leq t - 1$$

Commençons par $\frac{t-1}{t} \leq \ln(t)$:

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, montrons que $\ln(t) - \frac{t-1}{t} \geq 0$

tout d'abord $\ln(t) - \frac{t-1}{t} = \ln(t) - 1 + \frac{1}{t}$ ✓

$t \mapsto \ln(t) - 1 + \frac{1}{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonction qui le sont et $\forall t \in$ ... ✓

$(\ln(t) - 1 + \frac{1}{t})' = \frac{1}{t} - 0 - \frac{1}{t^2}$ $\left(= \frac{t^2 - t}{t^3}\right) = \frac{t-1}{t^2}$ ✓

$t - 1 > 0$ $\forall t > 1$ et $t^2 > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$

donc

t	0		1		$+\infty$
$\frac{t-1}{t^2}$		$-$	0	$+$	
$\ln(t) - 1 + \frac{1}{t}$		↘	0	↗	

✓

et $\ln(1) - 1 + \frac{1}{1} = 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$,

$\boxed{\frac{t-1}{t} \leq \ln(t)}$ Oui

faisons de même pour $\ln(t) \leq t - 1$, ✓

Soit $t \in$ ... $\ln(t) \leq t - 1 \iff t - 1 - \ln(t) \geq 0$ ✓

$t \mapsto t - \ln(t) - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions qui le sont et $\forall t \in$ ...

$(t - \ln(t) - 1)' = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$ ✓

$1 - \frac{1}{t} \geq 0 \iff t \geq 1$

donc

t	0		1		$+\infty$
$\frac{t-1}{t}$		$-$		$+$	
$t - \ln(t) - 1$		↘	0	↗	

de plus $1 - \ln(1) - 1 = 0$ ✓
donc $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(t) \leq t - 1$

Conclusion: $\boxed{\frac{t-1}{t} \leq \ln(t) \leq t - 1}$ ✓

3) d'après la question précédente :

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{t-1}{t} \le \ln(t) \le t-1$

~~donc~~

pas clair

$u \mapsto \frac{1}{u}$

n'est pas dércoissante sur R^* uniquement sur R_+^* ou R_-^*

donc $\frac{t}{t-1} \geq \frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{t-1}$

par croissance de l'intégrale

Faux à cause des bornes !!

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\int_x^{x^2} \frac{t}{t-1}\,dt \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,dt$

Resolvons $\int_x^{x^2} \frac{t}{t-1}\,dt$:

~~posons u=t+1 donc dt=dt~~

posons $u = t-1$ ✓ donc $t = u+1$ ✓

⚠ $u \mapsto u+1$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ $dt = du$ ✓

si $t = x^2$, $u = x^2-1$

si $t = x$, $u = x-1$

donc $\int_x^{x^2} \frac{t}{t-1}\,dt = \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{u+1}{u}\,du$ ✓

$= \int_{x-1}^{x^2-1} 1\,du + \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{1}{u}\,dt$

$= x^2-1-x+1+\left[\ln(|u|)\right]_{u=x-1}^{u=x^2-1}$

$= x^2-x+\ln(|x^2-1|)-\ln(|x-1|)$ ✓

faisons de même pour $\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,dt$

posons $t-1=u$, $t=u+1$, $dt=du$ $u \mapsto u+1$ est...

si $t=x$, $u=x-1$

$t=x^2$, $u=x^2-1$

donc $\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,dt = \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{1}{u}\,du$

$= \ln(|x^2-1|)-\ln(|x-1|)$

donc $x^2-x+\ln(|x^2-1|)-\ln(|x-1|) \le f(x) \le \ln(|x^2-1|)-\ln(|x-1|)$

~~donc lim~~

Faux!!

or $\lim_{x\to 1} x^2-x+\ln|x^2-1|-\ln|x-1| = \lim_{x\to 1} \ln|x^2-1|-\ln|x-1| = 0$

donc par le théorème d'encadrement : $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

~~de plus f(1)=~~

donc $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe, ainsi f est prolongeable par continuité en 1 et $f(1)=0$

4) on a donc d'après la question précédent

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $f : x \mapsto \begin{cases} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt & \text{si } x \neq 1 \\ x = 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

• f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

de plus $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt$

$= \int_1^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt - \int_1^{x} \frac{1}{\ln(t)}\,dt$

~~or par le théorème~~

$= \int_1^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt - \int_1^{x^2} \frac{2}{\ln^2(t)}\,dt$

$= \int_1^{x^2} \frac{1-2}{\ln(t)-\ln^2(t)}\,dt$

$= \int_1^{x^2} \frac{1}{\ln^2(t)-\ln(t)}\,dt$

posons ~~$u=\ln(t)$~~ ~~donc~~ $u = \sqrt{t}$, $t = u^2$ $2u\,du = dt$

si $t = x^2$, $u = x$

si $t = 1$, $u = 1$

donc $\int_1^{x^2} \frac{1}{\ln^2(t)-\ln(t)}\,dt = \int_1^{x} \frac{2u}{\ln^2(u^2)-\ln(u^2)}\,du$