

Exercice Printemps 10

Intégration / Continuité-dérivabilité

Solution de l'exercice 1

1. On pose $U = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Soit $x \in U$.

- Premier cas $x > 1$, alors $x^2 > x > 1$ et donc la fonction \ln est continue et non nulle sur $[x; x^2]$.
Donc $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est définie et continue sur $[x; x^2]$. Donc $f(x)$ existe.
- Second cas $0 < x < 1$, alors $0 < x^2 < x < 1$ donc la fonction est continue et non nulle sur $[x^2; x]$
donc $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est définie et donc

$$f(x) = - \int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln(t)}$$

existe bien.

Dans tous les cas $f(x)$ existe et donc f est bien définie sur $U = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

2. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$g(t) = t - 1 - \ln(t).$$

La fonction g est définie et même dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}.$$

Par conséquent pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$g'(t) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \geq 1.$$

De plus, $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$ et $g(1) = 0$. Ainsi,

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	0	$+\infty$

On en déduit que pour tout $t > 0$, $g(t) \geq 0$ i.e. $t - 1 \geq \ln(t)$. Il nous reste à démontrer que $\frac{t-1}{t} \leq \ln(t)$.
On pourrait poser $h(t) = \ln(t) - \frac{t-1}{t}$ mais voici une petite astuce. Soit $t > 0$, en posant $s = \frac{1}{t}$, on obtient par ce qui précède que

$$\ln(s) \leq s - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{t}\right) \leq \frac{1}{t} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\ln(t) \leq \frac{1-t}{t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t-1}{t} \leq \ln(t).$$

Conclusion,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{t-1}{t} \leq \ln(t) \leq t-1.$$

3. Soit $x \in U = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Premier cas, on suppose $x > 1$ et alors $x^2 > x > 1$. Donc pour tout $t \in [x; x^2]$, on a $t > 1$, et donc d'après la question précédente et la décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* ,

$$0 < \frac{t-1}{t} \leq \ln(t) \leq t-1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{t}{t-1}.$$

Puisque $x < x^2$, par croissance de l'intégrale, on obtient que

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} \leq f(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{t}{t-1} dt.$$

Or, d'une part,

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = [\ln(|t-1|)]_{t=x}^{t=x^2} = [\ln(t-1)]_{t=x}^{t=x^2} = \ln(x^2-1) - \ln(x-1) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \ln(x+1).$$

D'autre part, (par la ruse ancestrale)

$$\int_x^{x^2} \frac{t}{t-1} dt = \int_x^{x^2} \frac{t-1+1}{t-1} dt = \int_x^{x^2} 1 + \frac{1}{t-1} dt = (x^2-x) + \ln(x+1).$$

On a donc montré que pour tout $x > 1$,

$$\ln(x+1) \leq f(x) \leq (x^2-x) + \ln(x+1).$$

On observe alors que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \ln(x+1) = \ln(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^2-x) + \ln(x+1).$$

Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \ln(2).$$

Soit maintenant $x < 1$, alors $0 < x^2 < x < 1$. Donc pour tout $t \in [x^2; x]$, on a $t < 1$ et donc d'après la question précédente

$$\frac{t-1}{t} \leq \ln(t) \leq t-1 < 0.$$

Donc par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_-^* , on a

$$\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{t}{t-1} < 0.$$

En invoquant la croissance de l'intégrale et le fait que $x^2 < x$, on obtient

$$\int_{x^2}^x \frac{1}{t-1} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(t)} dt = -f(x) \leq \int_{x^2}^x \frac{t}{t-1} dt.$$

En multipliant par -1 , on a alors

$$-\int_{x^2}^x \frac{t}{t-1} dt \leq f(x) \leq -\int_{x^2}^x \frac{1}{t-1} dt.$$

De même que précédemment,

$$-\int_{x^2}^x \frac{1}{t-1} dt = -[\ln(|t-1|)]_{t=x^2}^{t=x} = -[\ln(1-t)]_{t=x^2}^{t=x} = \ln(1-x^2) - \ln(1-x) = \ln(1+x).$$

et

$$-\int_{x^2}^x \frac{t}{t-1} dt = \ln(1+x) + x^2 - x.$$

Par conséquent,

$$\forall x < 1, \quad \ln(1+x) + x^2 - x \leq f(x) \leq \ln(x+1)$$

Par encadrement, on en déduit à nouveau que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \ln(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x).$$

Conclusion, f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln(2)$.

4. On a vu que $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur l'intervalle $]1; +\infty[$ donc par le théorème fondamentale de l'analyse,

$$F_1 \quad : \quad x \mapsto \int_2^x \frac{1}{\ln(t)} dt$$

est \mathcal{C}^1 sur $]1; +\infty[$ et pour tout $x > 1$, $F_1'(x) = \frac{1}{\ln(x)}$. Or pour tout $x > 1$, on a $x^2 > 1$ et donc

$$f(x) = F_1(x^2) - F_1(x).$$

Donc par différence et composition de fonctions \mathcal{C}^1 , f est \mathcal{C}^1 sur $]1; +\infty[$ et

$$\forall x > 1, \quad f'(x) = 2xF_1'(x^2) - F_1'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

De même $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur l'intervalle $]0; 1[$ donc par le théorème fondamentale de l'analyse,

$$F_2 \quad : \quad x \mapsto \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{\ln(t)} dt$$

est \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; 1[$, $F_2'(x) = \frac{1}{\ln(x)}$. Or pour tout $x \in]0; 1[$, on a $x^2 \in]0; 1[$ et donc

$$f(x) = F_2(x^2) - F_2(x).$$

Donc par différence et composition de fonctions \mathcal{C}^1 , f est aussi \mathcal{C}^1 sur $]0; 1[$ et

$$\forall x \in]0; 1[, \quad f'(x) = 2xF_2'(x^2) - F_2'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

Ainsi, on a montré que f est \mathcal{C}^1 sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

Posons, $y = x - 1$ quand $x \rightarrow 1$, on a $y \rightarrow 0$. Donc

$$f'(x) = \frac{y}{\ln(1+y)} \underset{y \rightarrow 0}{=} \frac{y}{y + o(y)} \underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{1}{1 + o(1)} \underset{x \rightarrow 1}{=} 1 + o(1).$$

Ainsi :

- f est continue sur \mathbb{R}_+^* ,
- \mathcal{C}^1 sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$
- et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} f'(x) = 1.$$

Donc par le théorème de prolongement des fonctions \mathcal{C}^1 , on en déduit que f est \mathcal{C}^1 en 1 et de plus

$$f'(1) = 1.$$

Finalement f est \mathcal{C}^1 sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ et en 1. Conclusion f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .