

## Exercice Printemps 11

### Algèbre linéaire / Suites

**Exercice 1** *Suite de l'exercice de mercredi et dimanche.*

On pose  $F = \text{Vect}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$ . Soit  $g = f + 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ .

1. De quel espace  $F$  est-il un sous-espace vectoriel ?
2. Déterminer une base de  $F$ .
3. Préciser  $g^2, g^3$  puis  $g^k$  pour tout  $k \geq 2$ .
4. Montrer que la formule précédente reste vraie pour  $k = 0$  et  $k = 1$  et vérifier que  $\forall k \in \mathbb{N}, g^k \in F$ .
5. En vous inspirant de la formule précédente, montrer que  $g \in \text{GL}(\mathbb{R}^3)$  et déterminer  $g^{-1}$ .

**Exercice 2**

1. Déterminer la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3^n$ .  
*Indication : on pourra poser pour tout  $n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n}{3}$ .*
2. Déterminer les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant pour tout  $n \in \mathbb{N} u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 3$ .  
*On pourra chercher une solution particulière du type  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = an$ .*