1. $(f, f^2) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)^2$ et $Id_{\mathbb{R}^3} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

Donc $F = Vect(Id_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. oui à encadrer.

2. On pose $\mathcal{B}_F = (Id_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$ $\mathcal{B}_F$ est génératrice de F

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors en évaluant $\lambda_1 Id_{\mathbb{R}^3} + \lambda_2 f + \lambda_3 f^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

en u : $\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) + \lambda_3 f^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ $\iff$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Non justifié

Donc $\mathcal{B}_F$ est libre

Donc $\mathcal{B}_F$ est une base de F ✓ A encadrer.

$g^2 = g \circ g$

$= f^2 + 6f + 9 Id_{\mathbb{R}^3}$ oui

$g^3 = 9f^2 + 27f + 27 Id_{\mathbb{R}^3}$ Parachutage !

Exercice 2

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{U_n}{3^n}$ On a $U_{n+1} = 2U_n + 3^n$

$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{3^{n+1}}$ ✓

$= \frac{2U_n + 3^n}{3^{n+1}}$ ✓

$= \frac{2U_n}{3^{n+1}} + \frac{1}{3}$ ✓ $= \frac{2}{3} V_n + \frac{1}{3}$ ✓ On reconnait une suite...

Soit $\omega \in \mathbb{R}$ $\omega = \frac{2}{3}\omega + \frac{1}{3} \iff \omega = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}}$ ✓

$\iff \omega = 1$ ✓

On pose $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $W_n = V_n - \omega$ on a alors

$\forall n \in \mathbb{N}$ $W_{n+1} = V_{n+1} - \omega = \left(\frac{2}{3}V_n + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\omega + \frac{1}{3}\right)$ ✓ $= \frac{2}{3} W_n$ ✓

$\exists x_1 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\omega_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n x_1 \iff \forall n \in \mathbb{N}, V_n = \omega_n + \omega = \left(\frac{2}{3}\right)^n a + 1$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}, U_n = 3^n V_n = 2^n x_1 + 3^n$

$U_0 = 0 = x_1 + 1, x_1 = -1$ $\iff \forall n \in \mathbb{N}, U_n = 3^n - 2^n$

Recopier un corrigé ne sert à rien...

Soit $a \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = an$

$\forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n + 3 \iff \forall n \in \mathbb{N},\ an + 2a = 3(an + a) - 2an + 3$

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ 2a = 3a + 3$

$\iff a = -3$ ✓

On pose $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ solution

$\iff \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 3$

pas très clair $\iff \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} - v_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 3 - (3v_{n+1} - 2v_n + 3)$

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - v_{n+2} = 3(u_{n+1} - v_{n+1}) - 2(u_n - v_n)$

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n - v_n$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est solution $\iff \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = 3w_{n+1} - 2w_n$

NON! $\iff r^2 - 3r + 2 = 0$

??? $\iff 9 - 8 > 0$

$\iff r_1 = 1 \quad r_2 = 2$

$\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}\ w_n = \lambda 2^n + \mu$ ✓

$\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}.\ u_n = w_n + v_n = \lambda 2^n + \mu - 3n$