Correction de l'exercice Printemps 11
Algèbre linéaire / Suites

Solution de l'exercice 1

1. On a vu précédemment que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ donc $f^2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. Or on a aussi $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$. De plus on sait que $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ est un espace vectoriel. Conclusion,

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right).}$$

2. Posons $\mathscr{B}_f = (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$. Par définition de F, $\mathscr{B}_f$ est une famille génératrice de F. Montrons également que $\mathscr{B}_f$ est une famille libre de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_0 \,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + \lambda_1 \, f + \lambda_2 \, f^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}.$$

Autrement dit

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \qquad \lambda_0 \, x + \lambda_1 \, f(x) + \lambda_2 \, f^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

En particulier si $x = u$ (défini à l'exercice précédent),

$$\lambda_0 \, u + \lambda_1 \, f(u) + \lambda_2 \, f^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Or on a démontré à l'exercice précédent que $\mathscr{B}_u$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc $\mathscr{B}_u$ est libre et donc

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\mathscr{B}_f$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_f = \left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2\right) \text{ est une base de } F.}$$

3. Calculons, par propriété de la composition dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$,

$$g^2 = (f + 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2 = f^2 + 6f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + 9\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \qquad \text{car } f \text{ et } \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \text{ COMMUTENT !}$$

Ainsi,

$$\boxed{g^2 = f^2 + 6f + 9\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}.}$$

De même, comme f et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ commutent,

$$g^3 = (f + 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^3 = f^3 + 3f^2 \circ (3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) + 3f \circ (3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2 + 27\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = f^3 + 9f^2 + 27f + 27\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}.$$

Nous avons vu dans l'exercice précédent que $f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. Ainsi,

$$\boxed{g^3 = 9f^2 + 27f + 27\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}.}$$

Généralisons. Puisque $f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. On a également pour tout $p \geqslant 3$, $f^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 3$. Par la formule du binôme de Newton, valide car f et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ commutent, on a

$$\begin{aligned} g^k = (f + 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^k &= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^p \circ (3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^{k-p} \\ &= (3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^k + k f \circ (3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^{k-1} + \binom{k}{2} f^2 \circ (3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^{k-2} + \sum_{p=3}^{k} \binom{k}{p} f^p \circ (3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^{k-p}. \end{aligned}$$

Notez que cette formule a un sens car $k \geqslant 3$. Puisque pour tout $p \geqslant 3$, $f^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$, on obtient :

$$g^k = 3^k \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + k3^{k-1} f + \frac{k(k-1)}{2} 3^{k-2} f^2.$$

On note que l'on retrouve la formule précédente si $k = 2$. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \geqslant 2, \qquad g^k = 3^k \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + k3^{k-1} f + \frac{k(k-1)}{2} 3^{k-2} f^2.}$$

4. Si $k = 0$,

$$3^k \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + k3^{k-1} f + \frac{k(k-1)}{2} 3^{k-2} f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + 0 + 0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = g^0.$$

Donc la formule reste vraie. Si $k = 1$,

$$3^k \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + k3^{k-1} f + \frac{k(k-1)}{2} 3^{k-2} f^2 = 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + 3^0 f + 0 = 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + f = g = g^1.$$

Donc la formule reste vraie. Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad g^k = 3^k \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + k3^{k-1} f + \frac{k(k-1)}{2} 3^{k-2} f^2.}$$

En particulier, on a immédiatement

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad g^k \in \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2\right) = F.}$$

5. A l'aide de la formule précédente, on pose (en prenant $k = -1$)

$$h = 3^{-1} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + (-1)\, 3^{-1-1} f + \frac{(-1)\,(-1-1)}{2} 3^{-1-2} f^2 = \frac{1}{3} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - \frac{1}{9} f + \frac{1}{27} f^2.$$

Alors on observe que

$$\begin{aligned} g \circ h &= (f + 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ \left(\frac{1}{3} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - \frac{1}{9} f + \frac{1}{27} f^2 \right) \\ &= \frac{1}{3} f - \frac{1}{9} f^2 + \frac{1}{27} f^3 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - \frac{1}{3} f + \frac{1}{9} f^2 \\ &= \frac{1}{27} f^3 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

Or $f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. Donc

$$g \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}.$$

De même (où on aurait pu dire que $h \in F$, $g \in F$ et que tous les éléments de F en tant que polynôme en f commutent)

$$\begin{aligned} h \circ g &= \left(\frac{1}{3} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - \frac{1}{9} f + \frac{1}{27} f^2 \right) \circ (f + 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \\ &= \frac{1}{3} f - \frac{1}{9} f^2 + \frac{1}{27} f^3 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - \frac{1}{3} f + \frac{1}{9} f^2 \\ &= \frac{1}{27} f^3 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \\ &= \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

Donc g est bijective. Or $g \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ (en tant que somme de deux éléments de $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$). Conclusion $\boxed{g \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^3\right)}$ et

$$\boxed{g^{-1} = h = \frac{1}{3} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - \frac{1}{9} f + \frac{1}{27} f^2.}$$

Solution de l'exercice 2

1. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{u_n}{3^n}.$$
Alors, par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2u_n + 3^n}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\frac{u_n}{3^n} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}.$$
On reconnait alors une suite arithmético-géométrique. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :
$$\omega = \frac{2}{3}\,\omega + \frac{1}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{3}\,\omega = \frac{1}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = 1.$$
Fixons désormais $\omega = 1$ et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - \omega$. Alors, on observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$w_{n+1} = v_{n+1} - \omega = \left(\frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\,\omega + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\,(v_n - \omega) = \frac{2}{3}w_n.$$
Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$. Par conséquent, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n a \quad &\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = w_n + \omega = \left(\frac{2}{3}\right)^n a + 1 \\ &\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3^n v_n = 3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n a + 1\right) = 2^n a + 3^n. \end{aligned}$$
Or $u_0 = 0 = a + 1$ donc $a = -1$. Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3^n - 2^n.$$
Nous n'avons procédé que par implications, une synthèse s'impose donc. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$. Alors, on a bien
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - 2u_n - 3^n = 3^{n+1} - 2^{n+1} - 2\,(3^n - 2^n) - 3^n = 3\times 3^n - 2^{n+1} - 2\times 3^n + 2^{n+1} - 3^n = 0.$$
Conclusion, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3^n - 2^n}$$
est l'unique solution au problème posé.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = an$. Alors on a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n + 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ an + 2a = 3\,(an + a) - 2an + 3 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ 2a = 3a + 3 \\ &\Leftrightarrow \quad a = -3. \end{aligned}$$
Fixons désormais $a = -3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -3n$. Par ce qui précède, on en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une solution du problème posée. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une solution} \\ \leftrightarrow \quad & \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 3 \\ \leftrightarrow \quad & \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - v_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 3 - v_{n+2} \\ & \qquad = 3u_{n+1} - 2u_n + 3 - (3v_{n+1} - 2v_n + 3) \ \text{ car } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une solution} \\ \leftrightarrow \quad & \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - v_{n+2} = 3\,(u_{n+1} - v_{n+1}) - 2\,(u_n - v_n)\,. \end{aligned}$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$. Alors, on a

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une solution} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = 3w_{n+1} - 2w_n.$$

On observe dans ce cas que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 donc l'équation caractéristique associée est $0 = r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1)$ dont les solutions sont 2 et 1. Ainsi,

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une solution} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \lambda\, 2^n + \mu \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = w_n + v_n = \lambda\, 2^n + \mu - 3n.\end{aligned}$$

Conclusion, les solutions sont les suites vérifiant

$$\boxed{\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\, 2^n + \mu - 3n.}$$