

Exercice Printemps 12

Séries / Polynômes

Exercice 1 Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ solution de

$$(E) : \quad X(X-1)P' + P^2 - (2X+1)P + 2X = 0.$$

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + (-1)^n}\right)$.

1. Déterminer si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement ou non.
2. Déterminer si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge absolument ou non.
3. On admet que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge.