Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X(X-1)P' + P^2 - (2X+1)P + 2X = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad X(X-1)P' + P^2 = (2X+1)P - 2X \quad \checkmark \ (E)$$

Posons $n \in \mathbb{N}$ $n = \deg(P)$

Si $n \geq 1$

$\deg(X(X-1)P') = 2 + n - 1 = n+1$

$\deg(P^2) = 2n$ ✓

$\deg((2X+1)P) = n+1$ ✓

$\deg(-2X) = 1$. ✓

On a ainsi $\max(n+1, 2n) = \max(n+1, 1)$ oui

or, $n+1 > 2n \Leftrightarrow n = 0$ ✓

Cas 1: $n = 0$, donc $\exists C \in \mathbb{R}$, $P = C$.

Alors (E): $C^2 = (2X+1)C - 2X$ ✓

$\Leftrightarrow C^2 = 2X(C-1) + C$

à détailler un peu $\Leftrightarrow C = 1$

Si $n = 0$, $P = 1$ ✓ Réciproque ?

Cas 2: $n = 1$,

on pose $P = a_1 X + a_0$ ← Recouvre le cas précédent (et donc rend inutile le cas précédent)

donc $(E) \Leftrightarrow X(X-1)a_1 + (a_1 X)^2 + 2a_0 a_1 X + a_0^2 = (2X+1)(a_1 X + a_0) - 2X$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + a_1 = 2a_1 \\ 2a_0 a_1 - a_1 = 2a_0 + a_1 - 2 \\ a_0^2 = a_0 \end{cases}$$

par unicité des coefficients d'un polynôme ✓

Si $a_0 = 0$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P = X$$

Si $a_0 = 1$:

$$\iff \begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_0 = 1 \end{cases} \iff P = a_1 X + 1$$

Pourquoi ?

Si $n > 1$, on a $2n = n + 1$

$\iff n = 1$ impossible. ✓

$$\boxed{\text{Conclusion, } \mathcal{S} = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P = a_1 X + 1 \text{ ou } P = X \}}$$

Exo 21

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On sait que $n^2 \underset{n \to +\infty}{\gg} (-1)^n$ ✓

ainsi, $\lim_{n \to +\infty} n^2 + (-1)^n = n^2$

HORREUR !!!!

Une limite sur n ne peut pas dépendre dans son résultat de n.

Composée d'équivalents ???

et $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sin(2\pi n) = 0$ car $n \in \mathbb{N}$ et $x \mapsto \sin(x)$ est 2π périodique sur $\mathbb{R}$

Equivalent à 0 ???

Conclusion, $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ ne diverge pas grossièrement

OK revoir la rédaction.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n}\right) = \sin\left(2\pi n\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^2}}\right)$ oui

$$\underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(2\pi n\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^2}+o\left(\frac{(-1)^n}{2n^2}\right)\right)\right)$$ car $\frac{(-1)^n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ oui

$$\underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(2\pi n+\frac{\pi(-1)^n}{n}+o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)$$

Pas de composée d'équivalents.

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \sin\left(\frac{\pi(-1)^n}{n}\right)$$ car $x \mapsto \sin(x)$ est 2π périodique

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\frac{(-1)^n}{n}$$ car $\pi\frac{(-1)^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Alors $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\frac{1}{n}$, or, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi\frac{1}{n} \geq 0$ ✓

et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \pi\frac{1}{n}$ ~~...~~ diverge en tant que série harmonique, ✓

Conclusion ; par le théorème des équivalents sur les séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |v_n|$ diverge. oui

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = \sin\left(2\pi n \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^2}}\right)$$

$$\underset{n \to +\infty}{=} \sin\left(2\pi n \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n^2} - \frac{1}{8n^4} + o\left(\frac{(-1)^n}{n^4}\right)\right)\right)$$

$$\underset{n \to +\infty}{=} \sin\left(2\pi n + \underbrace{\pi\frac{(-1)^n}{n} - \frac{\pi}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longmapsto} 0}\right)$$

donc $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \pi\frac{(-1)^n}{n} - \frac{\pi}{4n^3}$ car $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \mapsto \sin(x)$ est 2π périodique.

Après la composée... la somme ! Interdit !!

$\Rightarrow$ $v_n - \pi\frac{(-1)^n}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^3} \geq 0$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $3 > 1$.

par le théorème ...

donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n - \frac{\pi(-1)^n}{n}$ converge.

or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_n - \frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{\pi(-1)^n}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \pi\frac{(-1)^n}{n}$ converge

donc $\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n \text{ converge en tant que somme de séries convergentes.}}$

oui