Exercice Printemps 12
Séries / Polynômes

Solution de l'exercice 1 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et notons $d = \deg(P)$. Supposons $d \geqslant 1$, alors $\deg(P') = d-1$, $\deg(X(X-1)P') = d+1$, $\deg(P^2) = 2d$, $\deg((2X+1)P) = d+1$ et $\deg(2X) = 1$. Supposons $d \geqslant 2$. Alors $2d > d+1$ et $2d > 1$. Donc les termes dominants ne se compensent pas et

$$\deg\Big(X(X-1)P' + P^2 - (2X+1)P + 2X\Big) = 2d > 1.$$

Dans ce cas, P n'est pas solution de (E). Par contraposée si P est solution de (E) alors $d \leqslant 1$.
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $P = aX + b$. On a alors,

$$\begin{aligned}
& P \text{ solution de } (E) \\
\Leftrightarrow\quad & X(X-1)P' + P^2 - (2X+1)P + 2X = 0_{\mathbb{R}[X]} \\
\Leftrightarrow\quad & \Big(X^2 - X\Big)(aX+b)' + (aX+b)^2 - (2X+1)(aX+b) + 2X = 0_{\mathbb{R}[X]} \\
\Leftrightarrow\quad & a\Big(X^2 - X\Big) + a^2X^2 + 2abX + b^2 - 2aX^2 - 2bX - aX - b + 2X = 0_{\mathbb{R}[X]} \\
\Leftrightarrow\quad & \Big(a + a^2 - 2a\Big)X^2 + (-a + 2ab - 2b - a + 2)X + b^2 - b = 0_{\mathbb{R}[X]} \\
\Leftrightarrow\quad & \Big(a^2 - a\Big)X^2 + (2ab - 2b - 2a + 2)X + b^2 - b = 0_{\mathbb{R}[X]}.
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme :

$$\begin{aligned}
P \text{ solution de } (E) \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 = a \\ 2ab - 2a - 2b + 2 = 0 \\ b^2 = b \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \ \text{ OU } \ a = 1 \\ ab - a - b + 1 = 0 \\ b = 0 \ \text{ OU } \ b = 1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Premier cas, $a = 0$, alors

$$P \text{ solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 1 \\ b = 0 \ \text{ OU } \ b = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P = 1.$$

Second cas, $a = 1$, alors

$$\begin{aligned}
P \text{ solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b - 1 - b + 1 = 0 \\ b = 0 \ \text{ OU } \ b = 1 \end{cases} \quad & \Leftrightarrow \quad b = 0 \ \text{ OU } \ b = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad P = X \ \text{ OU } \ P = X + 1.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{1, X, X+1\}.}$$

Il est facile de vérifier son résultat. Si $P = 1$,

$$0 + 1 - (2X+1) + 2X = 0.$$

Si $P = X$,

$$X(X-1) + X^2 - (2X+1)X + 2X = X^2 - X + X^2 - 2X^2 - X + 2X = 0.$$

Enfin, si $P = X + 1$,

$$X(X-1) + X^2 + 2X + 1 - (2X+1)(X+1) + 2X = 2X^2 + X + 1 - 2X^2 - 3X - 1 + 2X = 0.$$

Solution de l'exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n} = 2\pi n\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{1/2}.$$
Posons $u = \frac{(-1)^n}{n^2}$. Alors, $un \underset{\longrightarrow}{\to} +\infty 0$. Or $(1+u) \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{u}{2}+o(u)$. Donc
$$2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{=} 2\pi n\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}+o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 2\pi n + 2\pi\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Ainsi,
$$u_n = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(2\pi n+2\pi\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(2\pi\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$
Puisque $v = 2\pi\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sin(v) \underset{v\to 0}{\longrightarrow} 0$, par composition,
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$
Conclusion,
$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ ne diverge pas grossièrement.}}$$

2. On a vu à la question précédente que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(2\pi\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$
Posons $w = 2\pi\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $\sin(w) \underset{w\to 0}{=} w+o(w^2)$. On a
   - $w^2 \underset{n\to+\infty}{=} 4\pi^2\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   - $o(w^2) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   D'où
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 2\pi\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 2\pi\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Par suite,
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\pi\frac{(-1)^n}{n}.$$
Par passage à la valeur absolue :
$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\pi}{n}.$$
De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2\pi}{n} \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{2\pi}{n}$ diverge en tant que série harmonique (ou de Riemann d'exposant $\alpha = 1 < 2$). Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$ diverge. Conclusion,
$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ ne converge pas absolument.}}$$

3. On a vu à la question précédente que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 2\pi\frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ou encore

$$u_n - 2\pi\frac{(-1)^n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - 2\pi\frac{(-1)^n}{n}$. On a donc

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de domination,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n \text{ converge absolument.}$$

Or la convergence absolue implique la convergence donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge. Or d'après l'énoncé la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ converge donc en tant que somme de deux séries convergentes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n + 2\pi \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n},$$

on en conclut que

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}}$$