

TD10

Calculs réels

Exercice 1 Soit $a \in \mathbb{R}$ dont on précisera à chaque fois les valeurs possibles pour que les expressions soient bien définies. Simplifier les expressions suivantes.

1. $A = \sqrt{2 + \sqrt{3}}(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}$.
2. $B = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{12} + \sqrt{18}}$.
3. $C = \sqrt{a+1-2\sqrt{a}} + \sqrt{a+1+2\sqrt{a}}$.
4. $D = \sqrt{(a+1)^2 - 4a} + \sqrt{(a-1)^2 + 4a}$.
5. $E = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.
6. $F = \sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{9+4\sqrt{5}}$.
7. $G = \sqrt{1+2017\sqrt{1+2018 \times 2020}}$ *Indication : poser $X = 2019$.*
8. $H = (\sqrt{3} + 1)\sqrt[3]{9-5\sqrt{3}} - (\sqrt{3} - 1)\sqrt[3]{9+5\sqrt{3}}$.

Exercice 2 Pour chaque équation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$.
2. $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$.
3. $(x-1)(x+2)(x+3) = (x+4)(x-2)(x+1)$.
4. $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$.
5. $6x^4 - x^2 - 1 = 0$.
6. $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$.
7. $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$.
8. $x^6 + \sqrt{2}x^3 - \sqrt{3}x^3 - \sqrt{6} = 0$.
9. $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$.
10. $e^{2x} + 5e^x + 6 = 0$.
11. $e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$.
12. $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0$.
13. $\ln^2(x) - 2\ln(x) + 3 = 0$.
14. $4\ln^2(x) + 8\ln(x) + 3 = 0$.

Exercice 3 Résoudre dans \mathbb{R} les systèmes d'équations suivants.

1. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = -2 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ x + 4y + z = 10 \end{cases}$
4. $\begin{cases} -x + 4y - 5z = 7 \\ 3x - 5y + 3z = -1 \\ x + 3y - 7z = 2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 3z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

Exercice 4 Résoudre dans \mathbb{R} les systèmes suivants :

- $$(S_1) \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ x + y - z = -2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$
- $$(S_2) \begin{cases} 2x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 2 \\ 3x - y - 3z + 2t = 5 \\ 5y + 9z - t = -6 \end{cases}$$
- $$(S_3) \begin{cases} x - y + z + t = 5 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 8 \\ 3x + y - z + t = 7 \end{cases}$$
- $$(S_4) \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$
- $$(S_5) \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases}$$
- $$(S_6) \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 0 \\ x - y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$
- $$(S_7) \begin{cases} 2x + 2y - z + t = 4 \\ 4x + 3y - z + 2t = 6 \\ 8x + 5y - 3z + 4t = 12 \\ 3x + 3y - 2z + 2t = 6 \end{cases}$$
- $$(S_8) \begin{cases} 2x + 7y + 3z + t = 5 \\ x + 3y + 5z - 2t = 3 \\ x + 5y - 9z + 8t = 1 \\ 5x + 18y + 4z + 5t = 12 \end{cases}$$
- $$(S_9) \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + 2z - 3t = 2 \\ 2x + 4z + 4t = 3 \\ 2x + 2y + 3z + 8t = 2 \\ 5x + 3y + 9z + 19t = 6 \end{cases}$$
- $$(S_{10}) \begin{cases} 3x + 6y + 5z + 6t + 4u = 14 \\ 5x + 9y + 7z + 8t + 6u = 18 \\ 6x + 12y + 13z + 9t + 7u = 32 \\ 4x + 6y + 6z + 5t + 4u = 16 \\ 2x + 5y + 4z + 5t + 3u = 11 \end{cases}$$
- $$(S_{11}) \begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ 3x - 2y + 2z - 3t = 2 \\ 5x + y - z + 2t = -1 \\ 2x - y + z - 3t = 4 \end{cases}$$
- $$(S_{12}) \begin{cases} x + y + z + t + u = 7 \\ 3x + 2y + z + t - 3u = -2 \\ y + 2z + 2t + 6u = 23 \\ 5x + 4y + 3z + 3t - u = 12 \end{cases}$$
- $$(S_{13}) \begin{cases} x + 3y - 2z + 5t - 7u = 3 \\ x + 2y - 9z + 4t - 6u = -1 \\ 2x - y + 7z - 3t + 5u = 2 \\ x - y - 2t + 3u = 2 \end{cases}$$
- $$(S_{14}) \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x - 5y + 4z = 0 \\ x + 17y + 4z = 0 \end{cases}$$

Exercice 5 Pour chaque inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $x^2 - 5x + 6 \geq 0$
2. $x^4 + x^2 - 1 > 0$
3. $-2x^2 + 2x - 3 \geq 0$
4. $x^3 + 3x^2 - 4 < 0$
5. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 > 0$
6. $6x^4 - 17x^3 - 13x^2 + 33x - 9 \leq 0$
7. $\frac{x+5}{x^2-1} \geq 1$
8. $x \geq \frac{1}{x}$
9. $e^{2x} - 2e^x - 8 > 0$
10. $e^{2x} + 6e^x + 8 \leq 0$
11. $e^{2x} - 5e^x + 4 \geq 0$
12. $\ln^2(x) - 7\ln(x) + 12 \geq 0$

Exercice 6 Pour chaque équation ou inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $|x + 3| = 5$
2. $|x + 3| \leq 5$
3. $|2x - 5| = |x^2 - 4|$
4. $|4 - x| = x$
5. $|x^2 + x - 3| = |x|$
6. $|x + 2| + |3x - 1| = 4$
7. $x|x| = 3x + 2$
8. $x + |x| = \frac{2}{x}$
9. $|x^2 - 6x + 4| \leq 1$
10. $x + 2 < |2x - 5|$
11. $|2x - 4| \leq |x + 2|$
12. $|x + 12| \leq |x^2 - 8|$
13. $|2x - 4| \geq |x^2 - 4|$
14. $\frac{x}{x+1} \leq |2x + 1| + 1$
15. $x + \frac{1}{x} \leq |x + 4| + 3$
16. $x^2 - 4|x| + 3 > 0$
17. $|x + 3| > |x^2 - 3|$
18. $|x + 2| \geq \frac{1-x}{1+x}$

Exercice 7 Pour chaque équation ou inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $x + 5 = \sqrt{x + 11}$
2. $x = 1 + \sqrt{x^2 - 2}$
3. $x + 1 \leq \sqrt{x + 2}$
4. $x + 3 \leq \sqrt{x + 5}$
5. $\sqrt{x^2 - 1} \leq 2 - x$
6. $3x^2 - 3x - 4\sqrt{x^2 - x + 3} = 6$
7. $x + \sqrt{x^2 - 5x + 4} < 2$
8. $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 2} = 2$
9. $\left(\frac{2x}{1 - \sqrt{1 + 2x}}\right)^2 < 2x + 9$
10. $\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \frac{1}{2}$
11. $2x + 1 < \sqrt{x^2 + 8}$
12. $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \leq \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$
13. $\sqrt{6 - x} + \sqrt{3 - x} = \sqrt{x + 5} + \sqrt{4 - 3x}$

Exercice 8 Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt[4]{41 + x} + \sqrt[4]{41 - x} = 4$. On pose $X = \sqrt[4]{41 + x}$ et $Y = \sqrt[4]{41 - x}$.

1. A l'aide des valeurs de $X + Y$ et $X^4 + Y^4$, déterminer les valeurs possibles de XY .
2. En déduire l'ensemble des valeurs possibles de x .

Exercice 9 Pour chacune des équations ou inéquations, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $\sqrt{|x - 3|} = |x - 1|$
2. $\sqrt{|x - 3|} \leq x - 1$
3. $\sqrt{|x^2 - 4|} \leq |x - 1|$
4. $\sqrt{|x + 2|} \leq |x - 10|$
5. $\sqrt{1 - 2x} = |x + 7|$

Exercice 10 Soit $m \in \mathbb{R}$. On souhaite déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$(E) : \quad \sqrt{x^2 - m} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x.$$

1. Montrer que (E_m) est équivalente à $\begin{cases} x^2 \geq m \\ x^2 \geq 1 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{(x^2 - m)(x^2 - 1)} = \frac{m+4}{4} - x^2 \end{cases}$.
2. En déduire que (E_m) n'admet des solutions que si $m \in [0; \frac{4}{3}]$ et que dans ce cas, (E_m) possède une unique solution que l'on précisera en fonction de m .
3. Vérifier votre résultat pour $m = 0$ et $m = 1$.

Exercice 11 Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ et $|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. $\forall a, b \in [0; 1], \quad a^2 + b^2 - ab \leq 1$.
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad 1 + \sqrt{ab} \leq \sqrt{1 + a}\sqrt{1 + b}$.
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$.
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$.

Exercice 12 Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$.

Exercice 13 Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sin(x) \leq x$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq |x|$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(x) \leq x - 1$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + 1 \leq e^x$.
5. $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \quad |x| \leq |\tan(x)|$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right| \leq |x|$.

Exercice 14 Montrer que pour tout $x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$ et que pour tout $x \in [\frac{1}{2}; 0], x - x^2 \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 15 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, |x - \sin(x)| \leq \frac{|x|^3}{6}$.