

TD1

Logique et raisonnement

Eléments de logique

Exercice 1 - Solution. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont équivalentes ?

1. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$.
2. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.
3. $(P \text{ ET } Q) \Rightarrow R$.
4. $(P \Rightarrow R) \text{ ET } (Q \Rightarrow R)$.

Indication : dresser la table de vérité des différentes assertions.

Exercice 2 - Solution. Soient P et Q deux assertions. La proposition suivante : $(P \text{ ET } Q) \Rightarrow (\text{non}(P) \text{ OU } Q)$ est-elle vraie ?

Exercice 3 - Solution. Soient P, Q, R et S quatre assertions. Ecrire la négation de $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)$.

Exercice 4 - Solution. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et P, Q et R les assertions suivantes :

- $P : \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0,$
 $Q : \quad \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0,$
 $R : \quad (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0) \text{ OU } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0).$

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont exactes ?

1. $P \Rightarrow Q$
2. $Q \Rightarrow P$
3. $Q \Rightarrow R$
4. $\text{non}(R) \Rightarrow Q$
5. $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$
6. $\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(R)$

Lorsque l'affirmation est fautive, en donner un contre-exemple.

Exercice 5 - Solution. Ecrire les propositions suivantes et leurs négations à l'aide de quantificateurs et dire lesquelles sont vraies.

1. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
2. Il existe un entier multiple de tous les autres.
3. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
4. Certains réels sont supérieurs à leur carré.
5. Etant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.

Exercice 6 - Solution. Déterminer toutes les propositions l'on peut obtenir en permutant l'ordre des quantificateurs avec leur variable et préciser leur véracité.

$$1) \quad \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \quad z = xy.$$

Exercice 7 - Solution. Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant 0 et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Enoncer en français les assertions suivantes et écrire avec des quantificateurs leurs négations.

1. $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$.
2. $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
3. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$.
4. $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
5. $\forall x \in I, f(x) > 0 \Rightarrow x \neq 0$.

Exercice 8 - Solution. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Ecrire avec des quantificateurs les phrases suivantes puis les nier.

1. La fonction f s'annule sur I .
2. La fonction f est la fonction nulle sur I .
3. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur sur I .
4. La fonction f admet un minimum sur I .
5. La fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes sur I .

Exercice 9 - Solution. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et écrire leurs négations.

1. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.

Exercice 10 - Solution. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dans chacun des cas suivants dire si l'assertion est vraie ou fautive et la nier.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, n \leq N$.
2. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, n \leq N$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$.

Exercice 11 - Solution. Préciser la validité des énoncés suivants puis les nier.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m \text{ divise } n$.
2. $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m \text{ divise } n$.
3. $\exists a \in \mathbb{R}^*, \forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon$.
4. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}^*, |a| \leq \varepsilon$.
5. $\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 2^n > M$.
6. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y < x$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1 \neq 0 \text{ OU } x + 2 \neq 0)$.

Méthodes et raisonnements

Exercice 12 - Solution. Soient a et b deux réels strictement positifs.

- Démontrer que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- En déduire que $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.

Exercice 13 - Solution. Démontrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0) \Rightarrow (\alpha = \beta = 0).$$

Exercice 14 - Solution. Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$.

Exercice 15 - Solution. Démontrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$.

Exercice 16 - Solution. Soient a_1, \dots, a_9 neuf entiers naturels tels que $a_1 + \dots + a_9 = 90$. Démontrer qu'il existe trois de ces nombres dont la somme est supérieure ou égale à 30.

Exercice 17 - Solution. Démontrer que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

Exercice 18 - Solution. Soit x un irrationnel positif. Démontrer que \sqrt{x} est irrationnel.

Exercice 19 - Solution. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = P(x)$.

Exercice 20 - Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

Exercice 21 - Solution. Montrer que lorsque qu'un réel peut s'écrire de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}$, alors l'écriture est unique.

Exercice 22 - Solution. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ impaires tel que $f - \text{Id}_{\mathbb{R}}$ soit paire.

Exercice 23 - Solution. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad f(n+m) = f(n) + f(m).$$

Exercice 24 - Solution. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Exercice 25 - Solution. Déterminer tous les réels x strictement positifs vérifiant l'équation $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

Exercice 26 - Solution. Soient s et p deux réels. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe deux réels dont la somme vaut s et le produit vaut p .

Exercice 27 - Solution. On cherche l'ensemble des isométries de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(y) - f(x)| = |y - x|$.

- Analyse.** Soit f une isométrie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On définit l'application $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $\delta(x) = f(x) - f(0)$.
 - Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\delta(y)\delta(x) = xy$.
 - En déduire la forme de f .
- Synthèse.** Conclure.

Exercice 28 - Solution. Soit $q \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C} \dots$), démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 29 - Solution. Démontrer les formules suivantes :

- $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- $1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 30 - Solution. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$.

Exercice 31 - Solution. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + u_1 + \dots + u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 32 - Solution. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} \dots + \frac{u_n}{n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n$.

Exercice 33 - Solution. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 34 - Solution. On considère la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n-1)$.

Réponses

Solution de l'exercice 1 - *Énoncé*. On a $[P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [(P \text{ ET } Q) \Rightarrow R]$.

Lorsque P et R sont fausses et que Q est vraie alors l'assertion 1 est fausse tandis que l'assertion 2 est vraie.

Lorsque P est vraie et que Q et R sont fausses alors l'assertion 1 est vraie tandis que l'assertion 4 est fausse.

Lorsque P est vraie et que Q et R sont fausses alors l'assertion 2 est vraie tandis que l'assertion 4 est fausse.

Solution de l'exercice 2 - *Énoncé*. Naturellement !

Solution de l'exercice 3 - *Énoncé*. ($\text{non}(P)$ OU Q) ET (R ET $\text{non}(S)$)

Solution de l'exercice 4 - *Énoncé*.

1. Vrai.
2. Faux. Contre-exemple : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ s'annule en 0 mais pas sur \mathbb{R} tout entier.
3. Faux. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ en est encore un contre-exemple.
4. Vrai (invoquer le théorème des valeurs intermédiaires).
5. Vrai c'est la contraposée du 1.
6. Faux. Contre-exemple : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ vérifie $f(1) \neq 0$ et pourtant f n'est pas de signe constant.

Solution de l'exercice 5 - *Énoncé*.

1. $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, n < m$
Sa négation est $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}, n \geq m$.
L'affirmation initiale est vraie (prendre $m = n + 1$).
2. $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, n = km$
Sa négation est $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}, n \neq km$ ce qui peut aussi s'écrire $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, n \notin m\mathbb{Z}$.
En prenant $n = 0$ on montre bien que l'affirmation initiale est vraie.
3. $\forall z \in \mathbb{C}, \exists \omega \in \mathbb{C}, \omega^2 = z$
Sa négation est $\exists z \in \mathbb{C}, \forall \omega \in \mathbb{C}, \omega^2 \neq z$ Tout complexe possède au moins une racine carré dans \mathbb{C} .
L'affirmation initiale est vraie. En notant $z = r e^{i\theta}$ la forme polaire du complexe z et en posant $\omega = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$ par exemple, on obtient bien $\omega^2 = z$.

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, x \neq \frac{p}{q}$. On peut également résumer cette affirmation par $\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{Q}$.

Sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}, \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, x = \frac{p}{q}$.

L'affirmation initiale est fausse (exemple $\sqrt{2}, \pi, e, \dots$)

5. $\exists x \in \mathbb{R}, x \geq x^2$.

Sa négation est $\forall x \in \mathbb{R}, x < x^2$.

L'affirmation initiale est vraie (et même pour tous les réels dans $[-1; 1]$, démo ?).

6. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \exists (a, b) \in \{x, y, z\}, ab \geq 0$.

Sa négation est $\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall (a, b) \in \{x, y, z\}, ab < 0$.

L'affirmation initiale est vraie (faire des disjonctions de cas).

Solution de l'exercice 6 - *Énoncé*. La permutation de deux quantificateurs \forall voisins ne modifie pas l'affirmation. On peut donc obtenir trois propositions :

$$2) \quad \forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$$

$$3) \quad \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, z = xy$$

$$4) \quad \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, z = xy$$

1) est fausse. Montrons sa négation : $\text{non}(1) : \forall x \in \mathbb{R}^*, \exists (y, z) \in (\mathbb{R}^*)^2, z = xy$. Soit $x \in \mathbb{R}$. En prenant $y = 1$ et $z = x$ la négation est démontrée et donc 1) est fausse.

2) est fausse. Sa négation est $\exists y \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, \exists z \in \mathbb{R}^*, z = xy$. Par exemple pour $y = 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, en prenant $z = x$ la négation est démontrée et donc 2) est fausse.

3) est vraie. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Puisque $y \neq 0$, on peut poser $x = \frac{z}{y}$. Comme $z \neq 0$, on a bien $x \in \mathbb{R}^*$ et de plus $z = xy$.

4) est fausse. Sa négation est $\exists z \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*, z = xy$. Prenons $z = 1$ et soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors puisque $x \neq 0$, en posant $y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*$, on a bien $1 = xy$. Donc sa négation est vraie et 4) est fausse.

Solution de l'exercice 7 - *Énoncé*.

1. La fonction f est constante (sur I). Sa négation est $\forall C \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) \neq C$.
2. En prenant la contraposée de l'implication : la fonction f ne s'annule pas sauf peut-être en 0 (et elle fait ce qu'elle veut en 0). La négation est $\exists x \in I \setminus \{0\}, f(x) = 0$.
3. La fonction f est surjective sur \mathbb{R} : tout élément de \mathbb{R} admet un antécédent par f . La négation est $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \neq y$.
4. La fonction f est croissante sur I . La négation est $\exists (x, y) \in I^2, x > y$ tel que $f(x) \leq f(y)$ (et ne correspond pas à f décroissante !)

5. En prenant la contraposée, on obtient que f est négative (ou nulle) sur $\mathbb{R}_+^* \cap I$.
La négation est $\exists x \in I, x > 0$ tel que $f(x) > 0$.

Solution de l'exercice 8 - *Enoncé.*

- $\exists x \in I, f(x) = 0$. La négation est $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.
- $\forall x \in I, f(x) = 0$. La négation est $\exists x \in I, f(x) \neq 0$.
- $\forall (x, y) \in I^2, f(x) \neq f(y)$. La négation est $\exists (x, y) \in I^2, f(x) = f(y)$.
- $\exists x \in \mathbb{I}, \forall y \in I, f(y) \geq f(x)$. A ne pas confondre avec l'existence d'un minorant qui est donné par $\exists m \in \mathbb{R}, \forall y \in I, f(y) \geq m$. La négation de l'assertion initiale est $\forall x \in I, \exists y \in I, f(y) < f(x)$.
- $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) \geq M$. La négation est $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) < M$ (qui correspond à f majorée sur I).

Solution de l'exercice 9 - *Enoncé.*

- Faux (contre-exemple?). La négation est $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$.
- Vrai (démonstration?). La négation est $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$.
- Faux (contre-exemple?). La négation est $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y \leq 0$.
- Vrai (démonstration?). La négation est $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leq x$.

Solution de l'exercice 10 - *Enoncé.*

- Vrai. Négation : $\exists n \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, n > N$.
- Vrai. Négation : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, n > N$.
- Vrai. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \neq f(x)$ ou encore $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \notin \mathbb{R}$.
- Faux. Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \neq f(x)$.

Solution de l'exercice 11 - *Enoncé.*

- Vrai. Négation : $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, km \neq n$.
- Vrai. Négation : $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, km \neq n$.
- Faux. Négation : $\forall a \in \mathbb{R}^*, \exists \varepsilon > 0, |a| > \varepsilon$.
- Vrai. Négation : $\exists \varepsilon > 0, \forall a \in \mathbb{R}^*, |a| > \varepsilon$.
- Vrai. Négation : $\exists M > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, 2^n \leq M$.
- Faux. Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \geq x$.
- Vrai. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, (x + 1 = 0 \text{ ET } x + 2 = 0)$.

Solution de l'exercice 12 - *Enoncé.*

- En justifiant avec soin, élever au carré et développer.

- Supposer $a > b$ par exemple (puis faire de même avec $b > a$) et utiliser la question précédente avec $a' = a - b$ et $b' = b$.

Solution de l'exercice 13 - *Enoncé.* Vérifier que $\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2$ et $-\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$. En déduire que $\alpha\beta = 0$ puis conclure.

Solution de l'exercice 14 - *Enoncé.* Montrer que l'assertion recherchée est équivalente à l'inégalité bien connue : $(x + y)^2 \geq 0$.

Solution de l'exercice 15 - *Enoncé.* Elever au carré en justifiant avec soin chacune des équivalences.

Solution de l'exercice 16 - *Enoncé.* Procédons pas l'absurde. On cherche à démontrer l'assertion suivante :

$$\exists (i, j, k) \in \llbracket 1; 9 \rrbracket, i \neq j, i \neq k, j \neq k \text{ tel que } a_i + a_j + a_k \geq 30.$$

Supposons donc sa négation. On suppose que

$$\forall (i, j, k) \in \llbracket 1; 9 \rrbracket, i \neq j, i \neq k, j \neq k \text{ on a } a_i + a_j + a_k < 30.$$

En particulier pour $(i, j, k) = (1, 2, 3)$, on a $a_1 + a_2 + a_3 < 30$. De même pour $(i, j, k) = (4, 5, 6)$, $a_4 + a_5 + a_6 < 30$ et enfin $a_7 + a_8 + a_9 < 30$. Par conséquent,

$$90 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{<30} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6}_{<30} + \underbrace{a_7 + a_8 + a_9}_{<30} < 90,$$

ce qui est absurde. Conclusion,

on a bien montré qu'il existe trois de ces nombres dont la somme est supérieure ou égale à 30.

Solution de l'exercice 17 - *Enoncé.* Procéder par l'absurde. Utiliser la bijectivité du logarithme. Montrer que si $2^p = 3^q$ et si $p \neq 0$ alors 2 divise 3^q . En déduire que $p = 0$ puis conclure.

Solution de l'exercice 18 - *Enoncé.* Procéder par l'absurde et élever au carré.

Solution de l'exercice 19 - *Enoncé.* Faire le rapport et passer à la limite quand $x \rightarrow +\infty$ (croissance comparée).

Solution de l'exercice 20 - *Enoncé.* Montrons la contraposée : si n est impair alors $n^2 - 1$ est divisible par 8. Supposons n impair. Par définition, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Par conséquent,

$$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1).$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k(k + 1)$ est pair.

- En effet, si k est pair alors 2 divise k et donc $k(k+1)$. Donc $k(k+1)$ est pair.
- Si k est impair, alors $k+1$ est pair, 2 divise $k+1$ et donc $k(k+1)$. Donc $k(k+1)$.

Dans tous les cas, on a montré que $k(k+1)$ est pair, donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k(k+1) = 2p$. Finalement,

$$n^2 - 1 = 4 \times 2p = 8p,$$

est bien divisible par p . On a donc ainsi montré l'implication (n est impair) \Rightarrow ($n^2 - 1$ est divisible par 8). Conclusion,

$$(n^2 - 1 \text{ n'est pas divisible par } 8) \Rightarrow (n \text{ est pair}).$$

Solution de l'exercice 21 - Énoncé. Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et $(a', b') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$. Par conséquent, $a - a' = (b' - b)\sqrt{2}$.

- Premier cas, $b = b'$. Alors $a - a' = 0$ et donc $a = a'$, ce qui conclut l'unicité du couple dans ce cas là.
- Second cas, supposons que $b \neq b'$. Alors $\sqrt{2} = \frac{a-a'}{b'-b}$. Or $a - a' \in \mathbb{Z}$ et $b' - b \in \mathbb{Z}^*$. Ainsi, $\frac{a-a'}{b'-b} \in \mathbb{Q}$. D'où $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Donc ce second cas n'est jamais valide et donc le premier cas est toujours vrai.

Conclusion $\boxed{\text{si } a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}, \text{ avec } (a, a', b, b') \in \mathbb{Z}^4 \text{ alors } (a, b) = (a', b')}$.

Solution de l'exercice 22 - Énoncé. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction impaire sur \mathbb{R} telle que $f - \text{Id}_{\mathbb{R}}$ soit paire. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (f - \text{Id}_{\mathbb{R}})(x) &= (f - \text{Id}_{\mathbb{R}})(-x) && \text{par parité de la fonction } f - \text{Id}_{\mathbb{R}} \\ \Rightarrow f(x) - x &= f(-x) + x \\ \Rightarrow f(x) - x &= -f(x) + x && \text{par imparité de la fonction } f \\ \Rightarrow 2f(x) &= 2x \\ \Rightarrow f(x) &= x. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que l'unique candidate à la solution du problème est la fonction $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

Synthèse. Si $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$, alors il est clair que f est impaire et $f - \text{Id}_{\mathbb{R}} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ est une fonction paire. Donc $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ est bien une solution du problème.

Conclusion, $\boxed{\text{l'unique solution au problème posée est } f = \text{Id}_{\mathbb{R}}}$.

Solution de l'exercice 23 - Énoncé. On procède par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, f(n+m) = f(n) + f(m)$. En particulier, pour $n = m = 0$,

$$f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0).$$

Donc $f(0) = 0$. Montrons maintenant par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n) : \ll f(n) = nf(1) \gg$ est vraie.

Initialisation. Si $n = 0$, alors $0 \times f(1) = 0 = f(0)$, par ce qui précède. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie i.e. que $f(n) = nf(1)$. Alors, en prenant $m = 1$, on a

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) \quad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

Donc $f(n+1) = (n+1)f(1)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie à son tour.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$.

On a ainsi montré que SI f est une solution, nécessairement il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an$.

Synthèse. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an$. Alors pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$,

$$f(n+m) = a(n+m) = an + am = f(n) + f(m).$$

Donc f est une solution à notre problème.

Conclusion.

$\boxed{\text{Une fonction } f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \text{ est solution à notre problème si et seulement s'il existe } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an \text{ (ce sont les fonctions linéaires de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathbb{R})}$.

Solution de l'exercice 24 - Énoncé. Démontrer par analyse-synthèse que l'unique solution du problème est la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$.

Solution de l'exercice 25 - Énoncé. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$x^{(x^x)} = (x^x)^x \Leftrightarrow (x = 1 \text{ OU } x = 2).$$

Solution de l'exercice 26 - Énoncé. Soient $(s, p) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left[\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases} \right] \Leftrightarrow s^2 - 4p \geq 0.$$

Solution de l'exercice 27 - Énoncé.

1. (a) Ecrire $\delta(y)\delta(x)$ comme une somme/différence de carrés.
- (b) Si f est solution alors
 - il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$
 OU
 - il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x + a$.
2. **Synthèse.** On vérifie que les précédentes fonctions sont bien solutions.

Solution de l'exercice 28 - *Énoncé*. Si $q = 1$, le résultat est immédiat. Si $q \neq 1$, procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 29 - *Énoncé*. Par récurrence. Voir également le chapitre 4 pour d'autres techniques.

Solution de l'exercice 30 - *Énoncé*. Faire une récurrence double pour chaque question.

Solution de l'exercice 31 - *Énoncé*. Constater que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$ puis reconnaître une suite géométrique (ou raisonner par récurrence).

Solution de l'exercice 32 - *Énoncé*. Procéder par récurrence forte.

Solution de l'exercice 33 - *Énoncé*. Par une récurrence simple.

Solution de l'exercice 34 - *Énoncé*. Par une récurrence triple.