# TD 21
# Applications linéaires

## Généralités

**Exercice 1** Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2x^2$.
2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 4x - 3$
3. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sqrt{x^2}$
4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ (x, y) \mapsto (y, x)$
5. $f_5 : \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathcal{C}^0([0,1]);\ f \mapsto \left(t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\right)$
6. $f_6 : \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathbb{R};\ f \mapsto f(3/4)$
7. $f_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto 3x + 5y$
8. $f_8 : \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathbb{R};\ f \mapsto f(1/4) - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt$
9. $f_9 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y)$
10. $f_{10} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto xy$
11. $f_{11} : \mathcal{C}'([0,1]) \to \mathbb{R};\ f \mapsto \int_0^1 \ln(1 + |f(t)|)\,dt$
12. $f_{12} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3;\ x \mapsto (2x, x/\pi, x\sqrt{2})$
13. $f_{13} : \mathcal{C}^0([0,1]) \mapsto \mathcal{C}^1([0,1]);\ f \to \left(x \mapsto e^{-x}\int_0^1 f(t)dt\right)$
14. $f_{14} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R};\ (x, y) \to \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
15. $f_{15} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ (x, y, z) \mapsto (2x - 3y + z, x - y + z/3)$
16. $f_{16} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ (x, y) \mapsto$ la solution du système d'équations $\begin{cases} 3u - v &= x \\ 6u + 2v &= y. \end{cases}$
17. $f_{17} : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) : f \mapsto (x \mapsto f'(x) + f(x) \cdot \sin x)$

**Exercice 2** Soit $\varphi : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme et préciser son noyau.

**Exercice 3** Soient $E$ un espace vectoriel et $f$ un endomorphisme de $E$. Montrer que

1. $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$
2. $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$

**Exercice 4** Soit $u$ et $v$ deux endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que

$$v(\mathrm{Im}(u)) \subseteq \mathrm{Im}(u), \quad \text{et} \quad v(\mathrm{Ker}(u)) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$$

On dit que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par $v$.

## Applications linéaires en dimension finie

**Exercice 5** Justifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$f(1,0,0) = (0,1),\ f(1,1,0) = (1,0) \text{ et } f(1,1,1) = (1,1)$$

Donner l'expression de $f(x, y, z)$ en fonction de $x, y, z$ et déterminer l'image et le noyau de $f$. Vérifier le théorème du rang.

**Exercice 6** Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer leurs noyaux et images :

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$.
3. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + i\bar{z}$. ($\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

**Exercice 7** Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ définie par $f(x, y) = (2x - 3y, x + y)$. Montrer que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son application réciproque.

**Exercice 8** Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application injective avec $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que pour toute famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de $E$, on a

$$\mathrm{rg}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_n)$$

**Exercice 9** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $V$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $f$ un endomorphisme de $E$. Montrer que $V \subseteq f(V) \Rightarrow f(V) = V$.

**Exercice 10** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 = 2f + 3\mathrm{Id}_E$.

1. Démontrer que $f$ est un automorphisme de $E$ et déterminer $f^{-1}$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)$

3. Montrer que $\operatorname{Im}(f-3\mathrm{Id}_E) \subseteq \operatorname{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)$
4. On suppose dans cette question que $E$ de dimension finie. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f-3\mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)$.
5. Retrouver le résultat de la question précédente lorsque $E$ est de dimension quelconque.

**Exercice 11** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $f$ un endomorphisme nilpotent non nul de $E$ i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Supposons que $p$ est le plus petit entier tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Soit $u \in E$. Montrer que la famille $(u, f(u), f^2(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est libre si et seulement si $u \notin \operatorname{Ker}\left(f^{p-1}\right)$.
2. En déduire que $p \leqslant n$ puis que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
3. Si $n = p$, déterminer le rang de $f$.
4. On considère la dérivation sur $E = \mathbb{R}_n[X]$. Proposer un $u \in E$ vérifiant les conditions de la question 1.

**Exercice 12** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f$ un endomorphisme de $E$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

$$1)\ E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) \qquad 2)\ \operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im}(f) \qquad 3)\ \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2).$$

**Exercice 13** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$. Montrer que $\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}(g)$ puis que $|\operatorname{rg}(f)-\operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f-g)$.

**Exercice 14** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f$ un endomorphisme. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = \operatorname{Im}(f^p)$ et $N_p = \operatorname{Ker}(f^p)$.

1. Montrer que $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et que $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (pour l'inclusion).
2. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $I_{s+1} = I_s$ et $N_{s+1} = N_s$.
3. Soit $r$ le plus petit entier vérifiant la propriété précédente. Montrer que pour tout $s \geqslant r$, on a $I_s = I_r$ et $N_s = N_r$.
4. Montrer que $I_r$ et $N_r$ sont supplémentaires dans $E$.

**Exercice 15** Soient $E$ une $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f) \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg}(f)\right]$$

**Exercice 16** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$ et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f \circ f = 0$. On suppose que il existe $u_1, \dots, u_n \in E$ tels que $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ est une famille libre.

1. Démontrer que $\operatorname{rg}(f) \geqslant n$.
2. Prouver que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.
3. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$.
4. Démontrer que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ sont supplémentaires dans $E$.

**Exercice 17** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM - MA. \end{array}$$

1. Montrer que $f_A$ est un endomorphisme.
2. Déterminer $\operatorname{Im}(f_A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$

## Projecteurs et symétries

**Exercice 18** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{1}{2}(-y+z, -2x+y+z, -2x-y+3z) \end{array}$. Montrer que $f$ est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

**Exercice 19** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{1}{3}(x-2y-6z, -x+2y-3z, -x-y) \end{array}$. Montrer que $f$ est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

**Exercice 20** Soient $E = \mathbb{R}^3$,

$$F = \operatorname{Vect}((1,1,1)) \qquad \text{et} \qquad G = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x+3y-z = 0 \right\}.$$

Montrer que $F$ et $G$ sont en somme directe et déterminer la projection et la symétrie sur $G$ parallèlement à $F$.

**Exercice 21** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,E)$ telles que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

## Applications linéaires et matrices

**Exercice 22** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \to & AM. \end{array}$$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau et l'image de $f$.

**Exercice 23** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX \end{array}$. Montrer que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

## Applications linéaires et polynômes

**Exercice 24** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X) - P(X+1) \end{array}$.

a) Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Soit $P$ un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer le degré de $f(P)$ en fonction du degré de $P$.
c) Déterminer le noyau de $f$.
d) Montrer que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

**Exercice 25** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X];\ P(X) \mapsto P(X+1) + P(X)$

1. Montrer que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que pour tout $k = 0, \dots, n$ il existe un unique $E_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $E_k(X+1) + E_k(X) = X^k$.
3. Montrer que pour tout $k = 1, \dots, n$, $E_k' = kE_{k-1}$.

**Exercice 26** Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $f(P) = \left(X^2 - 1\right) P'' + 2XP'$.

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer son noyau et son image.

## Applications linéaires et suites

**Exercice 27** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1}$ et $w_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ u_{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que les applications
$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$
sont des endomorphismes de $E$.
2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de $f$ et $g$.

**Exercice 28** Soit $F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_n\}$.

1. Montrer que $F$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
2. Soit $f : F \to \mathbb{C}^3; (u_n) \mapsto (u_0, u_1, u_2)$. Démontrer que $F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de $F$.
3. Déterminer une base de $F$ constituée de suites géométriques.
4. Soit $g : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ (u_n) \mapsto (v_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n + u_{n+1} + u_{n+2}}{3}$.
   (a) Démontrer que $\tilde{g}$ la restriction de $g$ à $F$ est un endomorphisme de $F$.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de cet endomorphisme.

## Applications linéaires et intégrales

**Exercice 29** Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère $\phi, \psi \in \mathscr{F}(E)$ définie par : pour tout $f \in E$

$$\phi(f) = f' \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)d(t)$$

1. Montrer que $\phi$ et $\psi$ sont des endomorphismes de $E$.
2. calculer $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$.
3. Déterminer images et le noyaux de $\phi$ et $\psi$.

**Exercice 30** Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, on définit la fonction $\Phi(f)$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \Phi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \Phi(f)(0) = f(0).$$

1. Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme de $E$.
2. $\Phi$ est-il injectif ? Surjectif ?