TD 24
Représentation matricielle des applications linéaires

Matrice d'une application linéaire, d'une famille de vecteurs

Exercice 1 Pour les applications suivantes : déterminer la matrice relative aux bases canoniques, calculer leur rang, dire si elles sont injectives, surjectives, déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$. Si elles sont bijectives, déterminer leur réciproque.

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+y, y-2x+z) \end{cases}$
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto (y+z, z+x, x+y) \end{cases}$
3. $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \to \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto P(X+1) \end{cases}$
4. $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \to \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{cases}$
5. $f_5 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (x+y, 2x-3y) \end{cases}$
6. $f_6 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (4x+y, x-y, 2x+3y) \end{cases}$
7. $f_7 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto (3y+2z, -x, 4y+3z) \end{cases}$
8. $f_8 : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3, f_8(e_1) = e_1 + e_2, f_8(e_2) = e_1 + e_2 + e_3, f_8(e_3) = e_1 + e_3$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{K}^3$.

Exercice 2 On note $\mathscr{C}_E$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{C}_F$ celle de $\mathbb{R}^3$. On définit dans $\mathbb{R}_2$ les familles de vecteurs suivante :

$$\mathscr{E}_1 = ((-1,1),(2,1)) \qquad \mathscr{E}_2 = ((3,-2),(1,1))$$

On définit dans $\mathbb{R}_3$ les familles de vecteurs suivante :

$$\mathscr{F}_1 = ((0,1,1),(1,0,1)(1,1,0)) \qquad \mathscr{F}_2 = ((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,1)).$$

1. Montrer que les familles $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et que les familles $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $P_{\mathscr{C}_E,\mathscr{E}_1}$ et $P_{\mathscr{E}_1,\mathscr{C}_E}$
3. De même, déterminer $P_{\mathscr{C}_E,\mathscr{E}_2}$ et $P_{\mathscr{E}_2,\mathscr{C}_E}$.
4. A l'aide des matrice précédentes, calculer $P_{\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_2}$ et $P_{\mathscr{E}_2,\mathscr{E}_1}$.
5. Effectuer le même travail avec $\mathscr{C}_F, \mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$.
6. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{F}_1}(f_2)$ *(cf exo1)*
7. Déterminer les matrices $\mathrm{mat}_{\mathscr{F}_1,\mathscr{E}_2}(f_1)$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{E}_2,\mathscr{E}_1}(f_5)$. En déduire $\mathrm{mat}_{\mathscr{F}_1,\mathscr{E}_1}(f_5 \circ f_1)$.
8. Soit $u = \mathrm{mat}_{\mathscr{E}_2}(2,2)$. Donner les coordonnées de $f_7(u)$ dans la base $\mathscr{F}_2$.

Exercice 3 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}$ et que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ sont supplémentaires. Quelle est la forme de la matrice de f écrite dans une base adaptée à la supplémentarité de ces deux espaces ?

Exercice 4 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $f \circ f = f$ et que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires. Quelle est la forme de la matrice de f écrite dans une base adaptée à la supplémentarité de ces deux espaces ?

Exercice 5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 6 On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = (X^2 + X + 1)P' - (2X - 1)P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. L'application φ est-elle bijective ? Déterminer un antécéddent par φ de $X^2 - 1$.
3. Résoudre l'équation différentielle $(x^2 + x + 1)y' - (2x - 1)y = x^2 - 1$.

Exercice 7 Calculer le rang des familles de vecteurs suivantes de $\mathbb{R}^3$:

1. (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (0,1,1)$
2. (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (2,1,1)$, $u_2 = (1,2,1)$ et $u_3 = (1,1,2)$

3. (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1,2,1)$, $u_2 = (1,0,3)$ et $u_3 = (1,1,2)$

Exercice 8 Calculer le rang des applications linéaires suivantes :

1. $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ définie par $f(x,y,z) = (-x+y+z, x-y+z, x+y-z)$
2. $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$
3. $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ définie par $f(x,y,z,t) = (x+y-t, x+z+2t, 2x+y-z+t, -x+2y+z)$

Changement de base

Exercice 9 Soit (e_1, e_2, e_3) une base d'un $\mathbb{K}$-espace vetoriel E. On considère l'application linéaire f définie par

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3,\ f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3,\ f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

1. Donner une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.
2. Donner une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
3. Montrer que la réunion des bases précédentes constitue une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ? Même question pour la matrice de f^2.

Exercice 10 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Montrer que les vecteurs $\varepsilon_1 = (i, 2)$, $\varepsilon_2 = (-2i, 1)$ forment une base de $\mathbb{C}^2$.
2. Montrer que la matrice de f dans cette nouvelle base est diagonale. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note f l'endomorphisme associée à la matrice A relativement à la base $\mathscr{B}$. Soient enfin les vecteurs $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 - e_2$ et $u_3 = e_1 + e_3$ et $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.
3. En déduire sans calcul, une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On pose $u = e_1 + e_3$, $v = e_1 + e_2$ et $w = e_1 + e_2 + e_2$.

1. Montrer que $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.
2. Calculer A^n.

Exercice 13 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B}$. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. Que peut-on en conclure pour f ?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Quelle est la matrice de f relativement à une base adpatée à la supplémentarité de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 14 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f devient $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les puissances de la matrice B, puis celles de A.

Exercice 15 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 3 et $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathscr{C}$ soit D.
2. Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$. Calculer P^{-1}.
3. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ z_0 = 0 \\ x_{n+1} = 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$