

TD25

Couples de variables aléatoires

Espérance, variance

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini (Ω, \mathbb{P}) dont la loi est donnée par :

k	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	1/6	1/4	1/6	1/6	1/4

1. Calculer son espérance et sa variance.
2. Soit $Y = X^2$. Donner la loi de Y .

Exercice 2 Un tiroirs possède 5 paires de chaussettes bleues et 3 paires de chaussettes blanches. On choisit au hasard et sans remise les paires de chaussettes une à une jusqu'à l'obtention d'une paire de chaussettes bleues. Soit X le nombre de tirage nécessaires.

1. Donner les valeurs prises par X . Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 3 On lance simultanément deux dés équilibrés et on note X le maximum des deux chiffres obtenus.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $\{1, \dots, 20\}$.

1. Quelle est la loi de $\sup(X, 2) - 1$?
2. Quelle est la loi de $20 - X$?

Exercice 5 Un jeu consiste à lancer une bille dans un circuit comportant cinq butoirs : A, B, C, D, E marqués respectivement de 1, 2, 3, 4, 5 points. La bille frappe au hasard un des butoirs A, B ou C puis : de A, elle frappe au hasard B, D ou E; de B, elle frappe au hasard D ou E; de C, elle frappe E; de D ou de E, elle sort du circuit. Le joueur totalise alors les points marqués sur les butoirs heurtés par la bille. Soit T la variable aléatoire ainsi définie.

1. Déterminer la loi de probabilité de T .
2. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 6 Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires. Donner la loi de X et son espérance.

Exercice 7 Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires. Un joueur tire simultanément 3 boules au hasard. On suppose qu'il gagne un euro par boule blanche tirée et perd deux euros par boule noire tirée. On note X son gain. Donner la loi de X et son espérance.

Exercice 8 Le joueur lance deux dés. S'il sort 7, il gagne 5 euros, sinon il perd 1 euro. le jeu est-il équitable ?

Exercice 9 D'un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n ($n \geq 3$), on en tire successivement 3, au hasard et sans remise. On désigne par X le numéro du 3^e jeton. Déterminer la loi de probabilité de X , sa moyenne et sa variance.

Exercice 10 Une urne contient 2^n papiers sur lesquels sont reproduits les 2^n parties d'un ensemble à n éléments. On tire au hasard un papier et on appelle X la variable aléatoire réelle égale au cardinal de la partie tirée. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

Exercice 11 X est une variable uniforme sur $[[1, n]]$. On définit la variable aléatoire $Y = e^X$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 12 Dans une urne, il y a 5 jetons marqués +2 et 7 jetons marqués -1, on tire sans remise 4 jetons. On considère la somme des jetons tirés. En moyenne qu'obtient-on ?

Exercice 13 Un cavalier a $n \in \mathbb{N}^*$ haies à sauter numérotées de 1 à n , il s'arrête au premier saut non réussi. On suppose que s'il se présente devant la $k^{\text{ème}}$ haie, la probabilité pour qu'il réussisse son saut est $q_k \in]0, 1[$. On note X le nombre de sauts réussis, ainsi X prend pour valeur 0 s'il échoue à la première haie.

1. Déterminer la loi de X .
2. On suppose que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $q_k = q$ (constante). Déterminer la loi de X en fonction de q et $p = 1 - q$.
3. A l'aide de la fonction génératrice, calculer l'espérance de X .
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X)$.

Exercice 14 Une urne contient n boules vertes et n boules jaunes. On tire les boules une à une, sans remise jusqu'à obtenir la dernière boule jaune. Soit X le nombre de tirages nécessaires.

- Déterminer la loi de X .
- En déduire que
$$\sum_{k=n-1}^{2n-1} \binom{k}{n-1} = \binom{2n}{n}$$
- Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 15 Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \geq 3$). On extrait 3 jetons simultanément, on note X, Y, Z les trois numéros obtenus avec $X < Y < Z$.

- Déterminer la loi de Y .
- Calculer son espérance.

Exercice 16

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$, montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$
- On effectue trois tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 3$). Soit X le plus petit numéro obtenu. Déterminer la loi et l'espérance de X .

Exercice 17 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire les jetons un à un sans remise jusqu'à obtention d'un numéro supérieur au précédent. On note L la longueur de la suite des résultats obtenus (On posera $L = n + 1$ si on tire les n numéros dans l'ordre strictement décroissant).

- Déterminer la loi de L (on pourra étudier les événements $(L > k)$).
- Calculer l'espérance $\mathbb{E}(L)$.

Exercice 18 Une feuille d'exercices contient k erreurs typographiques. Lors d'une relecture, une erreur a la probabilité $p = 0,75$ d'être détectée.

- Calculer le nombre moyen d'erreurs détectées (on traduira au préalable le problème dans le vocabulaire des variables aléatoires).
- Calculer ensuite cette espérance si le texte est soumis à 47 relectures.

Exercice 19 Soit une urne contenant n^2 boules numérotées de 1 à n^2 . On appelle carré parfait un entier carré d'un nombre entier ($0, 1, 4, 9, \dots$ sont des carrés parfaits).

- On tire simultanément p boules.
 - Quelle est la probabilité qu'un et un seul numéro tiré soit un carré parfait ?
 - On note X le nombre de carrés parfaits obtenus lors des p tirages. Quelle est la loi de X ?

- On tire à présent deux boules simultanément. On note Z la variable aléatoire réelle égale à la valeur absolue de la différence des deux numéros tirés.

- Quelles sont les valeurs prises par Z ?
- Pour $A \leq j \leq n$, déterminer $\mathbb{P}(Z = j^2)$.
- Quelle est la probabilité que Z soit un carré parfait ?

Exercice 20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce de monnaie n fois de suite. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouver une condition sur l'entier n pour que le rapport du nombre de "face" obtenus sur le nombre de lancers soit strictement compris entre 0,4 et 0,6 avec une probabilité supérieure à 0,9.

Exercice 21 Un dé à six faces amène le 6 avec la probabilité $p \in]0, 1[$ à chaque lancer. On lance le dé une infinité de fois et on note X_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où le 6 est sorti au cours des $6n$ premiers lancers ($n \in \mathbb{N}^*$).

- Donner la loi de X_n , son espérance et sa variance.
- Ecrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour X_n .
- On suppose le dé équilibré. D'après l'inégalité, à partir de quelle valeur de n est-on sûr d'obtenir une proportion de 6 dans un intervalle de longueur 10^{-2} autour de $1/6$ avec une probabilité d'au moins $1/2$

Exercice 22 On lance 1000 fois une pièce équilibrée. On note X le nombre de piles obtenus. Donner en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev un majorant de la probabilité pour que $|X - 500|$ soit supérieur à 50.

Exercice 23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce de monnaie n fois de suite. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouver une condition sur l'entier n pour que la fréquence des face obtenus soit strictement compris entre 0,4 et 0,6 avec une probabilité supérieure ou égale à 0,9.

Exercice 24 (Piège : do not use Tcheby) Une population de 10^9 cellules est soumise à une suite de n séances d'irradiation. On suppose que chaque cellule a une réaction indépendante et qu'à chaque séance, la probabilité pour qu'une cellule soit tuée est 0,5. Combien de séances faut-il faire pour que la probabilité d'avoir tué toutes les cellules soit supérieure à 0,9 ?

Exercice 25 Une urne contient une proportion inconnue p de boules blanches. On y effectue une série de n tirages d'une boule avec remise et on approxime p par la proportion Z_n de boules blanches sur les n tirages.

- Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|Z_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2}$.
Indication : Démontrer que $\forall x \in]0, 1[, 0 < x(1-x) < \frac{1}{4}$
- En déduire une condition sur n pour que l'approximation donne une valeur approchée de p à 0,01 près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Couples de variables aléatoires réelles

Exercice 26 Dans un jeu télévisé chaque candidat tire trois questions parmi neuf : trois scientifiques, trois d'histoire et trois littéraires. Soit X le nombre de questions scientifiques tirées et Y le nombre de questions littéraires.

1. Donner la loi du couple (X, Y) ainsi que ses lois marginales.
2. Déterminer la loi et l'espérance de X sachant $(Y = 1)$.

Exercice 27 On lance un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4. Si D est le nombre obtenu, on lance une pièce D fois. Soit X le nombre de pile. Quelle est la loi du couple (D, X) ?

Exercice 28 On lance deux dés équilibrés ayant n faces numérotées de 1 à n . Quelle est la probabilité qu'il y ait un écart de 1 entre les deux dés ?

Exercice 29 On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne contenant n boules blanches et m boules noires, $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit X (respectivement Y) la variable égale à 1 si la première (respectivement la deuxième) boule tirée est blanche. Déterminer la loi du couple (X, Y) ainsi que les lois marginales.

Exercice 30 X et Y sont 2 variables aléatoires réelles indépendantes, $n \in \mathbb{N}$. $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$

1. Déterminer la loi de $X + Y$.
2. Déterminer pour $r \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ la loi conditionnelle de X sachant $(X + Y = r)$

Exercice 31 Soient X et Y deux variable aléatoire réelle de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p . Soient $U = X + Y$; $V = X - Y$

1. Donner la loi du couple (U, V) .
2. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 32 X et Y sont 2 variables aléatoires réelles indépendantes, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$; $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$.
2. Déterminer pour $r \in \llbracket 0, n + m \rrbracket$ la loi conditionnelle de X sachant $(X + Y = r)$.

Exercice 33 Soient X_1 une variable uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$, X_2 une variable uniforme sur $\{-1, 1\}$ et $Z = X_1 X_2$. On suppose X_1 et X_2 indépendantes.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, Z) .
2. Les variables X_1 et Z sont-elles indépendantes ? Déterminer leur covariance.

Exercice 34 On lance trois pièces équilibrées. Soit X le nombre de piles obtenus et Y la variable qui vaut 1 si on a obtenu plus de faces que de piles, 0 sinon.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .

Exercice 35 On choisit au hasard un nombre n entre 1 et 1000, puis un nombre entre 1 et n . On souhaite savoir ce que l'on obtient en moyenne pour ce second nombre. On note X la variable aléatoire réelle correspondant au premier nombre choisi et Y au deuxième nombre.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Déterminer la loi de Y . (On ne cherchera pas à calculer les sommes).
3. Répondre enfin à la question posée en introduction.

Exercice 36 On dispose de deux urnes. La première, U_1 , contient $n + 1$ jetons numérotés de 0 à n ; la seconde, U_2 , contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire au hasard un jeton de l'urne U_1 et on note N le numéro obtenu; puis on tire une poignée de N jetons de l'urne U_2 .

1. Déterminer l'espérance et la variance de N .
2. Soit X_i la variable aléatoire réelle prenant la valeur 1 si le jeton numéro i de l'urne U_2 a été tiré, et la valeur 0 sinon.
 - (a) Quelle est la loi de X_i , son espérance et sa variance ?
 - (b) Déterminer la covariance des couples (X_i, X_j) pour $i \neq j$. Ces variables aléatoires réelles sont-elles indépendantes ?

Exercice 37 n personnes se répartissent dans trois hôtels, H_1 (1 étoile), H_2 (2 étoiles) et H_3 (3 étoiles). On note X_i le nombre de personnes choisissant l'hôtel H_i . Chaque personne choisit son hôtel au hasard avec une probabilité proportionnelle au nombre d'étoiles.

1. Calculer la loi des X_i , donner leur espérance et leur variance.
2. Calculer la loi puis la variance de $X_1 + X_2$.
3. En déduire $\text{Cov}(X_1, X_2)$.
4. Déterminer la loi conjointe du triplet (X_1, X_2, X_3)

Exercice 38 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs, indépendantes, de même espérance m , et de même écart-type σ . On pose

$$T_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(T_n)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|T_n - m| \geq \varepsilon) = 0$