TD 27
Géométrie de l'espace

Changement de repère

Exercice 1 Dans l'espace muni d'un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $\Omega(1,2,-1)$ et les vecteurs $\vec{u}(1,2,1)$, $\vec{v}(-1,0,3)$ et $\vec{w}(2,2,-1)$. On note $\mathscr{B}$ la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment une base. On la note $\mathscr{B}'$.
2. Ecrire les formules de changements de bases entre $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
3. Soit $\mathscr{R}' = (\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Ecrire les formules de changements de repères entre $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$.
4. Donner sont les coordonnées de O dans $\mathscr{R}$ et les coordonnées de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ dans $\mathscr{B}'$.
5. Soient $A(3,4,5)_{\mathscr{R}}$ et $B(1,3,-2)_{\mathscr{R}'}$. Donner les coordonnées de A dans $\mathscr{R}'$ et celle de B dans $\mathscr{R}$.
6. Soient $\vec{a}(2,1,3)_{\mathscr{B}}$ et $\vec{b}(-4,1,3)_{\mathscr{B}'}$. Donner les coordonnées de $\vec{a}$ dans $\mathscr{B}'$ et celles de $\vec{b}$ dans $\mathscr{B}$.

Produit scalaire, vectoriel et mixte : propriétés algébriques

Exercice 2 Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs. Montrer que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \, \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \, \vec{w}$

Exercice 3 Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs. Exprimer $\det(\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{w}+\vec{u})$ en fonction de $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 4 Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et $\vec{s}$ quatre vecteurs. Montrer les relations suivantes :

1. $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \wedge \vec{s} \rangle = \langle \vec{s}, \vec{v} \rangle \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{s} \rangle \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$
2. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{s}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{s})\vec{w} - \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\vec{s}$

Exercice 5 Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs.
Montrer que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{0}$

Exercice 6 soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tel que $\vec{u} \neq \vec{0}$. On désire résoudre le problème de la division vectorielle, c'est à dire trouver un vecteur $\vec{x}$ tel que : $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$

1. Montrer que si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \neq 0$, il n'y a pas de solution. On suppose alors que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.
2. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que le vecteur $\vec{x}_0 = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v}$ soit solution.
3. Déterminer alors toutes les solutions.

Exercice 7 Soient M, A, B, C quatre points de l'espace.

1. Montrer que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
2. Déterminer l'ensemble des points vérifiant : $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}$

Plans et droites

Exercice 8 On considère le plan $\mathscr{P}$ dirigé par $\vec{u}(1,-1,2)$ et $\vec{v}(2,1,3)$ et passant par $A(3,4,-1)$. Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

Exercice 9 On considère la droite $\mathcal{P}$ passant par $A(1,1,1)$ et dirigée par $\vec{d}(1,1,1)$.

1. Donner un système d'équations paramétriques de $\mathcal{P}$
2. Donner un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{P}$

Exercice 10 On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations $2x - 4y + 3z + 5 = 0$ et $x - 2y + 3z - 2 = 0$.

1. Justifier que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas parallèles.
2. Donner une paramétrisation de leur intersection $\mathcal{I}$.
3. Donner une équation cartésienne du plan $\mathscr{R}$ passant par $A(2,-2,0)$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{Q}$.

Exercice 11 On considère la droite $\mathcal{P}$ passant par $I(2,2,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1,-3,1)$.

1. Ecrire un système d'équations paramétriques de $\mathcal{P}$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ orthogonal à $\mathcal{P}$ et passant par $A(3,-2,1)$.
3. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$.

Exercice 12 Vérifier que les points $A(3,2,1)$, $B(4,-1,3)$ et $C(-1,3,2)$ ne sont pas alignés. Former une équation cartésienne du plan qui les contient.

Exercice 13 Donner une équation paramétrique de la droite $\mathcal{P}$ définie par :
$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + y - 4z - 6 = 0 \end{cases}$$

Exercice 14 On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations respectives $3x - 4y + 1 = 0$ et $6x - 2y - 3z + 2 = 0$. Déterminer l'ensemble des points équidistants de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Exercice 15 Calculer :

1. La distance du point $A(1,2,1)$ au plan $\mathscr{P} : x - y + z = 2$.
2. La distance du point $B(1,0,-1)$ à la droite $\mathcal{D}$ paramétrée par $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

3. La distance du point $C(0,1,2)$ à la droite Δ définie par $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=3 \end{cases}$.

4. On se donne les droites $\mathcal{D}$: $\begin{cases} x-y+z=-1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ et $\mathcal{D}'$: $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-y-z-1/2=0 \end{cases}$.
Déterminer la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

5. Calculer la distance entre les droites

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' : \begin{cases} 2x-y+z=1 \\ -x-2y+3z=1 \end{cases}.$$

6. Même question avec $\mathcal{D}$: $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases}$ et $\mathcal{D}'$: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$. Déterminer de plus une équation de Δ leur perpendiculaire commune, les points $H=\mathcal{D}\cap\Delta$ et $H'=\mathcal{D}'\cap\Delta$ puis vérifier que $d(\mathcal{D},\mathcal{D}')=HH'$.

Exercice 16 Soit $a\in\mathbb{R}$ et $A(1,1,a)$. On considère les quatre plans d'équations :

$$\mathcal{P}_1 :\ x+y-1=0,\ \mathcal{P}_2 :\ y+z-1=0,\ \mathcal{P}_3 :\ x+z-1=0,\ \mathcal{P}_4 :\ x-y+z=0.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que les projections orthogonales de A sur les quatre plans soient quatre points coplanaires.

Exercice 17 Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $\begin{cases} 4x+y+z=0 \\ 2x+3y+5z+4=0 \end{cases}$ et A le point de coordonnées $(1,1,1)$. Déterminer les plans qui contiennent $\mathcal{D}$ et dont la distance à A vaut 1.

Exercice 18 Soit $A(1,2,1)$, $B(2,1,-1)$, $C(1,0,1)$ et $D(3,2,1)$. Déterminer le volume du tétraèdre $(ABCD)$.

Sphères

Exercice 19

1. Montrer que $x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z-22=0$ est l'équation d'une sphère $\mathcal{S}$ dont on déterminera le centre et le rayon.
2. Etudier l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan d'équation $x+2y-z+1=0$.

Exercice 20 Soient $A(1,2,3)$, $B(2,3,1)$, $C(3,1,2)$ et $D(1,0,-1)$.

1. Chercher le centre et le rayon de la sphère $\mathcal{S}$ circonscrite à $ABCD$.
2. Donner une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{S}$ en A.

Exercice 21 Déterminer l'équation de la sphère contenant les cercles d'équations

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ z=2 \end{cases}$$

Exercice 22 On considère les ensembles d'équations :

$\delta :\ x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z+5/2=0,\quad \delta' :\ x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+2=0$

$\delta'' :\ x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+8=0,\quad \mathscr{P} :\ x+2y-z-2=0,\quad \mathscr{P}' :\ 3x-y+2z+10=0$

1. Identifier chacun de ces ensembles.
2. Déterminer $\delta\cap\mathscr{P}$, $\delta'\cap\mathscr{P}'$, $\delta\cap\delta'$ et $\delta\cap\delta''$.

Problème

Exercice 23 Soit a un réel positif. Dans l'espace $\mathscr{E}$, on considère un carré $(ABCD)$ dont la longueur des cotés est a.
On note $\mathcal{P}$ le plan affine portant le carré $(ABCD)$ et $\mathcal{D}$ la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ en A.
Sur $\mathcal{D}$, on considère un point M différent de A.
(Indication : fixer un repère orthonormée direct, adapté au problème)

1. La perpendiculaire en M au plan (MBC) rencontre le plan $\mathcal{P}$ en un point R.
   (a) Faire une figure dans laquelle la droite $\mathcal{D}$ apparait comme verticale.
   (b) Montrer que R appartient à la droite (AB).
2. La perpendiculaire en M au plan (MCD) rencontre le plan $\mathcal{P}$ en un point S.
   (a) Quel est la plan médiateur Π de R et S (i.e. l'ensemble des points équidistants de R et S). Justifier la réponse.
   (b) En utilisant la réflexion par rapport à Π, en déduire que S appartient à la droite (AD) et donner la nature du triangle (ARS).
   (c) Montrer que la droite (MC) est perpendiculaire au plan (MRS).
3. On note K le milieu du segment $[RS]$.
   (a) Quel est le lieu géométrique du point K lorsque M décrit la droite $\mathcal{P}$ privée de A. Placer ce lieu en rouge sur le dessin.
   (b) La hauteur issue de A du triangle (MAK) rencontre le coté $[MK]$ en H. Montrer que (AH) est la hauteur issue de A du tétraèdre $(ARMS)$.
   (c) Montrer que H est l'orthocentre du triangle (MRS).