TD27bis
Déterminant

Exercice 1 Dans chaque cas, montrer que l'opérateur est un produit scalaire.

1. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini pour tout $(f,g)\in\mathscr{C}^1([-1;1],\mathbb{R})$, par $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t+f(0)g(0)$ est un produit scalaire.
2. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini pour tout $(P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$, par $\langle P,Q\rangle=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ est un produit scalaire.
3. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini pour tout $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, par $\langle A,B\rangle=\operatorname{tr}\left({}^tAB\right)$ est un produit scalaire.
   On pourra en donner une formule en fonction des coefficients de A pour montrer la positivité et la séparation.
4. Soit $\mathscr{B}(\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des suites bornées de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Montrer que l'opérateur $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini pour tout $\left(u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*},v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right)\in(\mathscr{B}(\mathbb{N}^*))^2$, par $\langle u,v\rangle=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{u_kv_k}{k^2}$ existe et est un produit scalaire.

Exercice 2 Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix}0&a&b\\a&0&c\\b&c&0\end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix}a+b&b+c&c+a\\a^2+b^2&b^2+c^2&c^2+a^2\\a^3+b^3&b^3+c^3&c^3+a^3\end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{vmatrix}$
5. $\begin{vmatrix}a&c&c&b\\c&a&b&c\\c&b&a&c\\b&c&c&a\end{vmatrix}$
6. $\begin{vmatrix}1&1&1\\\cos a&\cos b&\cos c\\\sin a&\sin b&\sin c\end{vmatrix}$

Exercice 3 Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit $\Delta_n=\begin{vmatrix}1&1&0&\cdots&0\\1&1&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&1\\0&\cdots&0&1&1\end{vmatrix}$

1. Trouver une relation de récurrence entre Δ_n, Δ_{n-1} et Δ_{n-2}.
2. En déduire la valeur de Δ_n

Exercice 4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer que s'il existe $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f^2=-\mathrm{Id}_E$, alors n est pair. Donner un exemple pour $n=2$.

Exercice 5 *Déterminant de Vandermonde.* Soient $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$ des scalaires deux à deux distincts. On note $V_n(a_0,\dots,a_n)=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&\cdots&1\\a_0&a_1&\cdots&\cdots&a_n\\a_0^2&a_1^2&\cdots&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&&\vdots\\a_0^n&a_1^n&\cdots&\cdots&a_n^n\end{vmatrix}$.

1. On pose $P:x\mapsto V_n(x,a_1,\dots,a_n)$. A l'aide d'un développement par rapport à la première colonne, montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
2. Montrer que P admet n racines simples sur $\mathbb{K}$.
3. En déduire une relation entre V_n et V_{n-1}.
4. Montrer que $V_n(a_0,\dots,a_n)=\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$. Peut -on étendre ce résultat au cas où deux au moins des a_i seraient égaux ?

Exercice 6

1. Donner le déterminant d'une matrice nilpotente i.e. une matrice $N\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel qu'il existe $p\in\mathbb{N}$, $N^p=O_p$.
2. Soit $E=\{x\mapsto e^xP(x)\mid P\in\mathbb{R}_n[X]\}$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et donner le déterminant de la dérivation sur E.

Exercice 7 Calculer : $\begin{vmatrix}a&b&a&c\\b&a&c&a\\a&c&a&b\\c&a&b&a\end{vmatrix}$.

Exercice 8 Les réels $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ étant fixés, on pose pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$D_n(a,b)=\begin{vmatrix}\lambda_1&a&\dots&a\\b&\lambda_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&a\\b&\dots&b&\lambda_n\end{vmatrix}\text{ et }P(X)=\begin{vmatrix}\lambda_1+X&a+X&\dots&a+X\\b+X&\lambda_2+X&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&a+X\\b+X&\dots&b+X&\lambda_n+X\end{vmatrix}.$$

1. A l'aide d'opérations sur les lignes et les colonnes, montrer que P est un polynôme de degré $\leqslant 1$.
2. Calculer $D_n(a,b)$ si $a\neq b$.
3. Calculer $D_n(a,a)$ (on admettra que $D_n(a,a)=\lim\limits_{b\to a}D_n(a,b)$).