

# Chapitre I : Logique et raisonnement

## I Eléments de logique

### I.1 Assertions et connecteurs logiques

#### Définition I.1

Une **assertion** ou une **proposition** est une phrase mathématique à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité : une assertion est soit **vraie**, soit **fausse**.

#### Exemple 1 :

1. L'assertion «  $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$  » est vraie.
2. L'assertion « 144 est le carré de 13 » est fausse.
3. L'assertion « 3 divise 94716 » est vraie.
4. L'expression «  $(4 - \sqrt{17}) \times \frac{4\pi}{7}$  » n'est pas une assertion.

#### Remarque 2 :

- On admet qu'une proposition est soit vraie soit fausse et ne peut être vraie et fausse simultanément, c'est ce que l'on appelle le principe du tiers exclu.
- Soit  $P$  la phrase suivante : « La phrase  $P$  est fausse ». La phrase  $P$  n'est pas une assertion car ne peut être ni vraie ni fausse. C'est le paradoxe du menteur équivalent à la phrase ( En énonçant la phrase présente, je mens. ) ou encore le paradoxe du barbier (cf la bibliographie de Russel en fin de chapitre).
- ATTENTION : l'exemple précédent montre qu'il est important de distinguer d'une part les assertions mathématiques et les éléments de logique en général présentés dans ce cours de logique et d'autre part les assertions du langage courant dit *vernaculaire*. Par exemple nous allons voir que l'utilisation du **OU** possède une signification différente dans le langage courant (cf Remarque 4).

#### Définition I.2

Soit  $P$  une assertion. **La négation** de  $P$ , notée  $\text{non}(P)$  (ou encore  $\bar{P}$  ou  $\neg P$ ) est l'assertion qui est vraie lorsque  $P$  est fausse et fausse lorsque  $P$  est vraie.

$P$	$\text{non}(P)$
V	F
F	V

#### Exemple 3 : Nier les assertions suivantes :

1.  $P_1 : (\pi \in \mathbb{Q})$
2.  $P_2 : (\text{Un rectangle qui possède deux côtés consécutifs égaux est un carré.})$
3.  $P_3 : (e \geq \pi)$ .

#### Définition I.3

Soient  $P$  et  $Q$  deux assertions.

L'assertion  $P$  ET  $Q$  (notée aussi  $P \wedge Q$ ) est l'assertion qui est vraie lorsque les assertions  $P$  et  $Q$  sont vraies simultanément et qui est fausse sinon.

$P$	$Q$	$P$ ET $Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

**Définition I.4**

Soient  $P$  et  $Q$  deux assertions.

L'assertion  $P$  OU  $Q$  (notée aussi  $P \vee Q$ ) est l'assertion qui est vraie lorsque l'une des deux assertions  $P$  ou  $Q$  au moins est vraie et qui est fausse sinon.

$P$	$Q$	$P$ OU $Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

**Remarque 4 :**

- Le ET et le OU peuvent avoir une signification légèrement différente dans le langage courant. Par exemple « Je prends un livre sur l'étagère et je le lis. » cache ici une dimension temporelle qui n'est pas présente dans le ET mathématique où les assertions doivent être vraies simultanément.
- ATTENTION : le OU n'est dans sa définition pas exclusif. Dans la phrase « Préfères-tu une villa en Italie ou un château en Bavière ? », le « ou » sous-entend que la personne ne doit choisir qu'une seule option. Le logicien lui permet d'avoir les deux ! Dans « l'aile OU la cuisse » il peut obtenir, l'aile sans la cuisse, la cuisse sans l'aile, l'aile et la cuisse.

**Exemple 5 :**

1. Traduire la proposition  $P$  : «  $\ln(2)$  est un réel entre 0,69 et 0,7. » à l'aide de deux assertions et du connecteur logique ET.
2. Soit  $x$  un réel. Traduire l'assertion  $Q$  : «  $x^2 \geq 3$  » à l'aide de deux assertions et du connecteur logique OU.

**Proposition I.5 (Lois de Morgan)**

Soient  $P$  et  $Q$  deux assertions.

- L'assertion «  $\overline{P \text{ ET } Q}$  » est l'assertion «  $\overline{P}$  OU  $\overline{Q}$  ».
- L'assertion «  $\overline{P \text{ OU } Q}$  » est l'assertion «  $\overline{P}$  ET  $\overline{Q}$  ».

**Remarque 6 :** Il est important de savoir appliquer ces règles automatiquement sans hésiter.

**Exercice 7 :** Ecrire les deux tables de vérité de «  $\overline{P \text{ ET } Q}$  » et de «  $\overline{P \text{ OU } Q}$  » et vérifier que les résultats sont identiques.

**Exemple 8 :** Soit  $ABC$  un triangle du plan.

1. A l'aide d'assertions sur les distances  $AB$ ,  $BC$  et  $AC$ , écrire l'assertion «  $ABC$  est un triangle équilatéral. ».
2. En déduire une assertion exprimant que  $ABC$  n'est pas équilatéral.
3. Faire de même pour écrire une assertion exprimant que  $ABC$  n'est pas isocèle.

**Proposition I.6**

Soient  $P$ ,  $Q$  et  $R$  trois assertions. Les connecteurs ET et OU sont

1. **commutatifs** : l'assertion  $(P \text{ ET } Q)$  s'écrit aussi  $(Q \text{ ET } P)$  et l'assertion  $(P \text{ OU } Q)$  s'écrit aussi  $(Q \text{ OU } P)$
2. **associatifs** :
  - L'assertion  $([P \text{ ET } Q] \text{ ET } R)$  s'écrit aussi  $(P \text{ ET } [Q \text{ ET } R])$ .
  - L'assertion  $([P \text{ OU } Q] \text{ OU } R)$  s'écrit aussi  $(P \text{ OU } [Q \text{ OU } R])$ .
3. **distributifs** :
  - L'assertion  $(P \text{ ET } [Q \text{ OU } R])$  s'écrit aussi  $([P \text{ ET } Q] \text{ OU } [P \text{ ET } R])$ .
  - L'assertion  $(P \text{ OU } [Q \text{ ET } R])$  s'écrit aussi  $([P \text{ OU } Q] \text{ ET } [P \text{ OU } R])$ .

**Exemple 9 :** Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

1. Ecrire l'assertion  $((x - 3)(y + 2) \geq 0)$  à l'aide des assertions  $(x \geq 3)$ ,  $(y \geq -2)$ ,  $(x \leq 3)$ ,  $(y \leq -2)$  et de connecteurs logiques.
2. Ecrire la négation de l'assertion trouvée à la question 1.
3. Démontrer que l'assertion obtenue à la question 2 correspond bien à l'assertion  $((x - 3)(y + 2) < 0)$ .

## I.2 Implication et équivalence

### Définition I.7

Soient  $P$  et  $Q$  deux assertions. L'**implication** de  $Q$  par  $P$ , notée  $P \Rightarrow Q$ , est l'assertion «  $Q$  OU  $\bar{P}$  ».

$P$	$Q$	$P \Rightarrow Q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$

### Exemple 10 :

1. L'implication (S'il pleut alors je ne joue pas dehors.) est équivalente à

(il ne pleut pas) OU [(il pleut) ET ( je ne joue pas dehors)].

Sa négation est (il pleut) ET (je joue dehors).

2. Soient  $a$  et  $b$  deux réels. L'implication  $(a = b) \Rightarrow (a^2 = b^2)$  est vraie. En effet, par disjonction de cas :
  - Si l'assertion  $(a = b)$  est fausse, c'est-à-dire si  $a \neq b$ , alors  $(a^2 = b^2)$  peut être vraie ou fausse (on ne sait pas) mais de toutes façons, par définition, l'implication  $(a = b) \Rightarrow (a^2 = b^2)$  est vraie.
  - Si l'assertion  $(a = b)$  est vraie, alors naturellement  $(a^2 = b^2)$  est aussi vraie et donc l'implication  $(a = b) \Rightarrow (a^2 = b^2)$  est vraie.

Dans tous les cas, on voit que l'implication  $(a = b) \Rightarrow (a^2 = b^2)$  est vraie.

### Remarque 11 :

- Puisqu'une implication  $P \Rightarrow Q$  est toujours vraie dans le cas où  $P$  est fausse, il suffit pour la démontrer de vérifier que lorsque l'on a  $P$  alors on a  $Q$  en même temps. Cela signifie que la démonstration d'une implication correspond bien à ce que vous avez étudié précédemment.
- Il peut paraître étrange d'affirmer que  $P \Rightarrow Q$  est toujours vraie lorsque  $P$  est fausse. Cependant l'argument suivant peut aider à comprendre cette notion contre-intuitive. Pour montrer qu'une implication  $P \Rightarrow Q$  est fausse il faut et il suffit de montrer que  $Q$  est fausse alors que  $P$  est vraie, autrement dit que l'assertion  $(P$  ET  $\text{non}(Q))$  est vraie. L'assertion  $\text{non}(P \Rightarrow Q)$  est donc  $(P$  ET  $\text{non}(Q))$ . En niant ces deux expressions de la même assertion on trouve que  $P \Rightarrow Q$  est exactement  $(\text{non}(P)$  OU  $Q)$ .
- D'après la définition de l'implication, une proposition fausse implique toutes les assertions possibles.

### Définition I.8

Soient  $P$  et  $Q$  deux assertions et considérons l'implication  $P \Rightarrow Q$ .

- **La contraposée** de l'implication  $P \Rightarrow Q$  est l'implication  $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ .
- **La réciproque** de l'implication  $P \Rightarrow Q$  est l'implication  $Q \Rightarrow P$ .
- **L'équivalence**  $P \Leftrightarrow Q$  est l'assertion  $(P \Rightarrow Q)$  ET  $(Q \Rightarrow P)$ . C'est donc l'assertion qui est vraie lorsque l'implication  $(P \Rightarrow Q)$  et sa réciproque  $(Q \Rightarrow P)$  sont vraies simultanément. On dit alors que  $P$  est équivalent à  $Q$  ou encore que  $P$  est vraie **si et seulement si**  $Q$  est vraie.

**Exercice 12 :** Ecrire les tables de vérité de la contraposée, la réciproque et de l'équivalence.

**Exemple 13 :** On reprend l'implication  $(a = b) \Rightarrow (a^2 = b^2)$  où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Déterminer si la contraposée, la réciproque et l'équivalence associées sont vraies. Lorsque ce n'est pas le cas, déterminer un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  sur lequel les assertions sont vraies.

### Proposition I.9

Soient  $P$ ,  $Q$  et  $R$  trois assertions.

- L'implication est **transitive** :
 
$$((P \Rightarrow Q) \text{ ET } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R).$$
- La contraposée est équivalente à l'implication :
 
$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)).$$
- La négation de l'implication  $P \Rightarrow Q$  est  $P$  ET  $\text{non}(Q)$ .

**Remarque 14 :** Notez que la négation d'une implication n'est pas une implication. Il ne faut pas confondre la négation d'une implication, sa contraposée et sa réciproque.

### Définition I.10

Soient  $P$  et  $Q$  deux assertions.

- Si  $P$  implique  $Q$ , il suffit que  $P$  soit vraie pour que  $Q$  le soit.  
On dit que  $P$  est **une condition suffisante** pour réaliser  $Q$ .  
Au contraire pour que  $P$  soit vraie il faut absolument que  $Q$  le soit.  
On dit que  $Q$  est **une condition nécessaire** pour réaliser  $P$ .
- Si  $P$  est équivalente à  $Q$ , on dit que  $P$  est **une condition nécessaire et suffisante** pour réaliser  $Q$ .

**Exemple 15 :** Soit  $x \geq 0$ .

1. Démontrer l'implication suivante :  $x^2 + x + 1 \neq 0 \Rightarrow x + 1 \neq \sqrt{x}$ .
2. Démontrer que l'assertion  $x + 1 = \sqrt{x}$  est toujours fausse.

**Exemple 16 :** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Démontrer que l'implication ( $f$  continue)  $\Rightarrow$  ( $f$  dérivable) est fausse en général.

**Exemple 17 :** Soit  $x \in [-2; +\infty[$ .

1. Justifier que l'équivalence  $x = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow x^2 = x+2$  est fausse pour certaines valeurs de  $x$ .
2. Modifier le terme de droite de l'équivalence pour obtenir une équivalence qui soit vraie.



## I.3 Prédicats et quantificateurs

### Définition I.11

On appelle **prédicat** une assertion  $P(x)$  qui dépend d'un paramètre  $x$  (à valeurs dans un ensemble  $E$  considéré).

**Exemple 18 :**

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit l'assertion  $P(n)$  : (l'entier  $n$  est pair). Alors naturellement, on remarque que  $P(2)$  est vraie tandis que  $P(3)$  est fausse.
2. Pour toute fonction  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  (l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ) dérivable sur  $\mathbb{R}$ , on considère l'assertion  $Q(f) : f' + f = 0$ . Déterminer une fonction  $f$  pour laquelle  $Q(f)$  est vraie et une fonction  $f$  pour laquelle  $Q(f)$  est fausse.
3. Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On note que l'assertion  $R(x, y) : x^2 + y^2 \geq 0$  est toujours vraie. Donc l'assertion  $\tilde{R} : (\text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ on a } x^2 + y^2 \geq 0)$  est vraie. Attention  $R(x, y)$  est un prédicat alors que  $\tilde{R}$  non.

Pour préciser des prédicats en assertions, on définit les quantificateurs suivants.

### Définition I.12

- **Le quantificateur universel**, noté  $\forall$ , signifie « pour tout » :  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 0$ .
- **Le quantificateur existentiel**, noté  $\exists$ , signifie « il existe » :  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \geq 0$ .

**Remarque 19 :**

- La notation  $\exists$ , signifie qu'il existe (au moins) un élément. Il se peut qu'il en existe un seul ou plusieurs (on ne sait pas).
- On trouve parfois le symbole  $\exists!$  qui signifie « il existe un unique ». L'ajout du point d'exclamation garantit l'unicité de l'élément rendant le prédicat vraie.
- ATTENTION : il est très important de n'utiliser les symboles  $\forall, \exists, \Rightarrow, \Leftarrow$  et  $\Leftrightarrow$  uniquement dans des assertions mathématiques. Il est rigoureusement interdit de s'en servir comme abréviations au milieu d'une rédaction en français!

- Tout se dit All en anglais, en prenant la première lettre (A) et en la retournant, nous obtenons le symbole  $\forall$ . De même l'existence est traduit par Exists, en prenant la première lettre (E) et en la retournant, nous obtenons le symbole  $\exists$ .
- Il est possible de combiner les quantificateurs lorsque le prédicat dépend de plusieurs variables (voir l'exemple 20 ci-dessous).
- **IMPORTANT** : l'assertion  $(\forall x \in E, P(x))$ , avec  $E$  un ensemble et  $P(x)$  un prédicat, ne dépend pas de la variable  $x$  ! Exemple : pour  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , l'assertion  $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0)$  ne dépend pas de  $x$  et signifie que la fonction  $f$  est positive ou nul sur  $\mathbb{R}$ . L'assertion peut également s'écrire  $(\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0)$ . La variable  $x$  peut être remplacée par une autre variable (par exemple  $t$ ). Elle est alors appelée **variable muette**.

**Exemple 20 :**

1. « La fonction  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  » s'écrit  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ .
2. « La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas croissante » se traduit par l'assertion  $\exists n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$ .
3. « La fonction  $f$  est majorée » se traduit par l'assertion  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$ .

**Remarque 21 :**

- On peut intervertir deux quantificateurs universels ou deux quantificateurs existentiels. Par exemple pour  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ , les deux assertions  $(\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x, y) > 0)$  et  $(\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x, y) > 0)$  sont équivalentes. On peut en particulier écrire l'assertion de la façon suivante :  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) > 0)$ . Autre exemple, pour  $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , les deux assertions  $(\exists x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, f(x) > \varepsilon)$  et  $(\exists \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > \varepsilon)$  sont équivalentes. On peut à nouveau écrire l'assertion de la façon suivante :  $(\exists (\varepsilon, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, f(x) > \varepsilon)$ .
- **ATTENTION** : en règle général il est absolument interdit d'intervertir un quantificateur universel avec un quantificateur existentiel sous peine de changer la signification de l'assertion ! Exemple : l'assertion  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 > M$  est vraie. Soit  $M \in \mathbb{R}$ . Si  $M \leq 1$ , il suffit de prendre  $x = 2$ . Si  $M > 1$ , il suffit alors de prendre  $x = M$ . Cependant l'assertion  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathbb{R}, x^2 > M$  est fausse. Par l'absurde, si cette affirmation est vraie alors en prenant  $M = x^2 + 1$ , on obtient  $x^2 > x^2 + 1$  donc  $0 > 1$ , ce qui est absurde.

**Proposition I.13**

Soit  $E$  un ensemble et  $P(x)$  un prédicat dépendant d'une variable  $x \in E$ .

- La négation de l'assertion  $\forall x \in E, P(x)$  est  $\exists x \in E, \text{non}(P(x))$ .
- La négation de l'assertion  $\exists x \in E, P(x)$  est  $\forall x \in E, \text{non}(P(x))$ .

**Exemple 22 :** En niant les assertions de l'exemple 20, on obtient :

- $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$  qui signifie bien que la fonction s'annule en au moins un point.
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$  qui signifie bien que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
- $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M$  signifie que la fonction  $f$  n'est pas majorée.

**Remarque 23 :** Il est très important de savoir appliquer ses règles de négation, proprement, mécaniquement et rapidement.

## II Méthodes de raisonnements

### II.1 Pour montrer une assertion $P$

**Par raisonnement direct :** On part d'une assertion  $P_0$  que l'on sait vraie et par une série d'implications directes  $P_0 \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow P$  vraies on en déduit  $P$ .

**Par l'absurde :** On suppose que  $P$  est fausse et on en déduit un résultat absurde. On en déduit que  $P$  ne peut être fausse et est donc vraie.

**Exemple 24 :**

1. (Euclide) Démontrons qu'il existe une infinité de nombre premiers. Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers notons-les  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Considérons l'entier  $p = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$ . Il est facile de voir que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p > p_k$ . Donc  $p$  est un entier supérieur à 1 et n'est pas un nombre premier. Donc il existe un nombre premier  $q$  qui divise  $p$ . Puisque que  $q$  est premier, il existe  $n_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $q = p_{n_0}$ . L'entier  $p_{n_0}$  divise  $p$  et divise  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$  donc il divise la différence :  $p - p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n = 1$ . Donc  $p_{n_0}$  est un nombre premier divisant 1 ce qui est impossible. Donc il existe une infinité de nombre premiers.

2. Démontrons que  $\sqrt{2}$  est irrationnel. Supposons que  $\sqrt{2}$  est rationnel alors il existe deux entiers  $p$  et  $q$  premiers entre eux tels que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ . En particulier  $p^2 = 2q^2$ . Donc  $p^2$  est pair. Si  $p$  est impair, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $p = 2k + 1$  et donc  $p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k(2k + 2) + 1$ . Donc ( $p$  impair  $\Rightarrow p^2$  impair). Donc en prenant la contraposée, on en déduit que ( $p^2$  pair)  $\Rightarrow$  ( $p$  pair). Donc  $p$  est pair, il existe  $l \in \mathbb{N}$  tel que  $p = 2l$  et donc  $p^2 = 4l$ . De la relation  $p^2 = 2q^2$  on en déduit que  $2l = q^2$ . Donc  $q^2$  est pair et donc  $q$  est pair. Ainsi  $p$  et  $q$  sont deux nombres pairs premiers entre eux, ce qui est impossible. Donc  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

## II.2 Pour montrer un prédicat $P(x)$

**Avec un quantificateur universel :** Pour montrer  $\forall x \in E, P(x)$  :

1. Par une suite d'équivalences directes : on montre que l'assertion  $\forall x \in E, P(x)$  est équivalente à une assertion  $\forall x \in E, Q(x)$  que l'on sait vraie. Cette méthode n'est valide que lorsque l'équivalence est facile et sans ambiguïté.
2. Lorsque l'assertion  $\forall x \in E, P(x)$  est moins évidente, on **fixe** un élément  $x \in E$  et on montre alors que le prédicat  $P(x)$  est vrai.
3. Par disjonction des cas : on découpe  $E$  en deux sous-ensemble  $F$  et  $G$  tels que  $F \cup G = E$  alors

$$(\forall x \in E, P(x)) \quad \Leftrightarrow \quad ((\forall x \in F, P(x)) \text{ ET } (\forall x \in G, P(x))).$$

**Exemple 25 :** Montrer par disjonction de cas l'assertion suivante : «  $\forall n \in \mathbb{N}, n(2n + 1)(7n + 1)$  est divisible par 2 ». Procéder de même pour démontrer l'assertion  $\forall n \in \mathbb{N}, n(2n + 1)(7n + 1)$  est divisible par 3.

**Avec un quantificateur existentiel :** Pour montrer  $\exists x \in E, P(x)$

1. On invoque un théorème abstrait assurant cette existence.
2. On exhibe concrètement au moins un élément  $x \in E$  dont on sait qu'il vérifie  $P(x)$ .

**Exemple 26 :** Montrons l'assertion suivante :  $\exists(a, b) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , tel que  $a^b \in \mathbb{Q}$ . Considérons  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  et procédons par disjonction de cas.

Premier cas  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  est rationnel. Alors, l'énoncé est vérifié avec  $a = b = \sqrt{2}$  car  $\sqrt{2}$  est irrationnel (voir Exemple 24).

Second cas  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  est irrationnel. Alors l'énoncé est vérifié avec  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  et  $b = \sqrt{2}$  car  $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ .

## II.3 Pour montrer une implication $P \Rightarrow Q$

**Par raisonnement direct :** On suppose  $P$  vraie et on montre que  $Q$  l'est aussi.

**Par contraposée :** On montre  $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ .

**Par l'absurde :** On suppose  $P$  ET  $\text{non}(Q)$  et l'on montre que l'on obtient alors un résultat absurde.

**Exemple 27 :** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Démontrer l'implication suivante :

$$(\forall \varepsilon > 0, \quad x < \varepsilon) \Rightarrow x \leq 0.$$

## II.4 Pour montrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q$

**Par raisonnement direct :** On démontre une série d'équivalences  $P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q$ .

**Par double implication :** On montre que  $P \Rightarrow Q$  et que  $Q \Rightarrow P$ .

**Exemple 28 :** Démontrer l'équivalence suivante :

$$(f \text{ est une fonction paire et impaire}) \Leftrightarrow (f \text{ est la fonction nulle}).$$

## II.5 Le raisonnement par Analyse-Synthèse

On recherche un ensemble de solutions à un problème donné ( $E$ ). Pour ce faire on procède en deux temps.

**Analyse/Conditions nécessaires.** On fixe une solution de l'équation (qui peut être un réel, une fonction, ou autre). On détermine le maximum de caractéristiques que peut avoir cette solution afin de réduire le nombre de candidats solutionnant le problème ( $E$ ).

**Synthèse/Conditions suffisantes.** On vérifie que les candidats obtenus à l'étape précédente sont tous bien solutions du problème ( $E$ ).

**Exemple 29 :**

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation  $x = \sqrt{3 - 2x}$ .
2. Montrer l'assertion suivante :

$$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists (g, h) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2 \text{ tel que } g \text{ est paire, } h \text{ est impaire et } f = g + h.$$

## II.6 Le raisonnement par récurrence

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$ . On souhaite montrer la propriété suivante :  $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n))$ , où  $P(n)$  est un prédicat.

### La récurrence simple :

- **Initialisation.** On montre que  $P(n_0)$  est vraie.
- **Hérédité.** On fixe un entier  $n \geq n_0$ , quelconque et on suppose que  $P(n)$  est vraie. On montre alors que  $P(n+1)$  est vraie. Dans cette étape on montre donc que  $\forall n \geq n_0, (P(n) \Rightarrow P(n+1))$ .
- **Conclusion.** La propriété est vraie au rang  $n_0$  et est héréditaire. On en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n)$  est vraie.

### La récurrence double :

- **Initialisation.** On montre que  $P(n_0)$  ET  $P(n_0 + 1)$  sont vraies.
- **Hérédité.** On fixe un entier  $n \geq n_0$ , quelconque et on suppose que  $P(n)$  ET  $P(n+1)$  sont vraies. On montre alors que  $P(n+2)$  est vraie.
- **Conclusion.** On en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n)$  est vraie.

### La récurrence forte :

- **Initialisation.** On montre que  $P(n_0)$  est vraie.
- **Hérédité.** On fixe un entier  $n \geq n_0$ , quelconque et on suppose que  $\forall k \in \llbracket n_0, n \rrbracket$ , la propriété  $P(k)$  est vraie. On montre alors que  $P(n+1)$  est vraie.
- **Conclusion.** On en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n)$  est vraie.

### Exemple 30 :

1. Démontrer l'assertion suivante :  $\forall n \in \mathbb{N}, n > 4, 2^n > n^2$ .
2. On considère la suite de Fibonacci définie par  $u_0 = 0, u_1 = 1$  et  $\forall n \geq 0, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ . Démontrer que

$$\forall n \geq 0, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

3. Démontrer que tout entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers.

### III Prochainement... Les complexes - Définition

#### Définition-Proposition III.1

- On définit/note  $i$  le nombre vérifiant  $i^2 = -1$ .
- Pour tout couple de réels  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , le nombre  $z = a + ib$  est appelé un complexe.
- On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes :  $\mathbb{C} = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ .

#### Remarque 31 :

1. Si l'on prend le couple  $(a = 0, b = 1) \in \mathbb{R}^2$  on obtient alors le complexe particulier  $i = 0 + 1 \times i$ .
2. Au contraire pour tout couple de la forme  $(a, 0)$  avec  $a \in \mathbb{R}$ , on retombe alors sur un réel :  $a + 0 \times i = a$ . A ce titre on dit que les réels forment un sous-ensemble des complexes  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ . L'ensemble des nombres complexes est donc un ensemble encore plus gros que  $\mathbb{R}$ .
3. ATTENTION : la réciproque est fautive, en général un complexe n'est pas un réel. En particulier  $i \notin \mathbb{R}$ . Mais aussi  $1 + i \notin \mathbb{R}$ ,  $4i \notin \mathbb{R}$  etc.

#### Proposition III.2 (Opérations complexes)

Pour tout  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$ , avec  $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$ , on a

- $z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = a + a' + i(b + b')$
- $zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$ .

#### Exemple 32 :

1. Soient  $z_1 = 1 + 2i$  et  $z_2 = -3 + \frac{i}{2}$ . Calculer  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 z_2$ ,  $z_1 - z_2$ ,  $z_1^2$ .
2. Soient  $z_1 = -6i$  et  $z_2 = \frac{3}{4} + 7i$ . Calculer  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 z_2$ ,  $z_1 - z_2$ ,  $z_1^2$ .
3. Soient  $z_1 = \sqrt{3} - i$  et  $z_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}i$ . Calculer  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 z_2$ ,  $z_1 - z_2$ ,  $z_1^2$ .

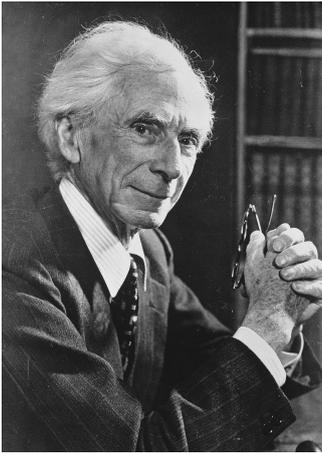
#### Définition III.3

Pour tout complexe  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ , avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,

- Le réel  $a$  est appelé **la partie réelle** de  $z$ , notée  $\text{Re}(z)$ .
- Le réel  $b$  est appelé **la partie imaginaire** de  $z$ , notée  $\text{Im}(z)$ .
- L'écriture  $a + ib$  est appelée **la forme algébrique** ou **forme cartésienne** de  $z$ .

#### Exemple 33 :

1. Soient  $z = -1 + 2i$  et  $z' = 3 - 5i$ . Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de  $Z_1 = 3z + iz'$  et  $Z_2 = 5izz'$ .
2. Soient  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i$  et  $z' = \sqrt{2}i$ . Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de  $Z_1 = z + \sqrt{2}z'$  et  $Z_2 = zz'$ .
3. Soient  $z = 1 + 3i$  et  $z' = 7 + 4i$ . Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de  $Z_1 = iz - z'$  et  $Z_2 = z^3$ .
4. *Plus dur pour ceux qui ne l'ont jamais vu...* Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de  $z = \frac{1}{1+i}$ .



**Bertrand RUSSEL** (Trelleck, Pays de Galles 1872 - Penrhyndeudraeth, Pays de Galles 1970) est un mathématicien, logicien, philosophe et homme politique britannique. Il est issu d'une famille aristocrate et deviendra lui-même Comte de Russel. Son grand-père a été Premier Ministre du Royaume-Uni. Il perd ses parents très jeune et est élevé par sa grand-mère dans une ambiance très rigide et puritaine. Contrairement à son grand frère, Russel est très introverti et a peu de contact avec les enfants de son âge. A 11 ans il découvre dans la bibliothèque Euclide et se passionne pour les mathématiques. Il entre en 1890 au Trinity College de Cambridge et ses talents exceptionnels sont très rapidement remarqués. Il se tourne vers la métaphysique, se marie une première fois contre l'avis de sa famille. Il voyage alors aux Etats-Unis puis en Allemagne avant de rentrer enseigner les sciences économiques en Angleterre.

Politiquement, Russel devient pacifiste et le restera durant toute sa vie. Pour ses idées, il se voit contraint de démissionner pendant la Première Guerre Mondiale et est même emprisonné quelques temps en 1918. En 1920, il voyage en URSS et critique le régime totalitaire qui s'installe. Il repart en 1938 aux Etats-Unis et revient en 1943 au Trinity

College de Cambridge. Il continue son action pour la paix et milite contre l'arme nucléaire et la guerre au Viêtnam. Russel se démarque également sur son ouverture d'esprit et son libéralisme sexuel. Il se maria quatre fois et sera renvoyé systématiquement de ses enseignements aux Etats-Unis pour son « encouragement à l'immoralité sexuelle ». Mais Russel est surtout connu pour son oeuvre littéraire et obtient en 1950 le prix Nobel de littérature. Il sort alors de l'anonymat et reçoit beaucoup d'honneur.

En mathématiques, dans la droite ligne de son paradoxe du barbier, il est connu pour les avancées qu'il propose en logique. Il soutient l'idée que les mathématiques sont une extension de la logique et cherche à axiomatiser cette dernière.

Il s'éteint à l'âge de 98 ans.

Son militantisme contre l'armement nucléaire lui vaudra une incarcération, très courte certes, mais à l'âge de 89 ans !

On raconte, qu'intrigué par la définition logique qu'une assertion fautive implique n'importe quelle autre assertion (vraie ou fautive), un philosophe interpella Bertrand Russel de la façon suivante : « -Vous voulez dire que si  $2 = 1$ , alors vous êtes le Pape ? »

« -Bien sûr, répondit Russel. En effet, le Pape et moi sommes deux personnes distinctes et deux égale un, donc le Pape et moi sommes la même personne. »

Un village isolé ne possède qu'un seul barbier. Ce barbier a pour principe de raser TOUS les villageois qui ne se rasent pas eux même mais aussi de ne raser QUE les villageois qui ne se rasent pas eux-même. Alors le barbier se rase-t-il lui même ?

Une mathématicienne vient d'accoucher. Sa mère impatiente lui demande au téléphone :

« -C'est une fille ou un garçon ? »

-Oui. »