

Chapitre XI : Les Matrices

Dans tout ce chapitre \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I Généralités

I.1 Définition

Définition I.1

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, on appelle **matrice** toute famille de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K} : (a_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1;n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1;p \rrbracket}}$ que l'on ordonne sous forme de tableau de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p-1} & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p-1} & a_{i,p} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,j} & \dots & a_{n-1,p-1} & a_{n-1,p} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p-1} & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque 1 :

- La place des coefficients dans le tableau a son importance. Si vous échangez la place de deux coefficients vous définissez une nouvelle matrice. Par exemple si $n = p = 2$ on a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
- De façon générale, si $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1;n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1;p \rrbracket}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1;n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1;p \rrbracket}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket, a_{i,j} = b_{i,j}.$$

Définition I.2

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket$, $a_{i,j} = 0$, alors la matrice A est appelée **la matrice nulle** notée $0_{n,p}$ ou 0 .
- Si $n = 1$, on dit que A est **une matrice ligne** ou encore **un vecteur ligne**.
- Si $p = 1$, on dit que A est **une matrice colonne** ou encore **un vecteur colonne**.
- On appelle ligne i ou $i^{\text{ième}}$ ligne de A le vecteur ligne $(a_{i,1} \quad \dots \quad a_{i,p})$.
- On appelle colonne j ou $j^{\text{ième}}$ colonne de A le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$.

Définition I.3

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On définit l'addition $+$ entre deux matrices par

$$A + B = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} + (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

i.e.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \dots & a_{1,p} + b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \dots & a_{n,p} + b_{n,p} \end{pmatrix}$$

- On définit la multiplication d'une matrice par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ par

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = \lambda \cdot (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

i.e.

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \dots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Exemple 2 :

- $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 & 1 & 1+i \\ i & 2-i & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 & i \\ 0 & -1 & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1+2i \\ i & 2-2i & 3 & 8+\sqrt{2} \end{pmatrix}$
- $-5 \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ \sqrt{3} & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -30 & 0 \\ -5\sqrt{3} & 10 & -5 \\ -15 & -5 & 5/3 \end{pmatrix}$

Remarque 3 :

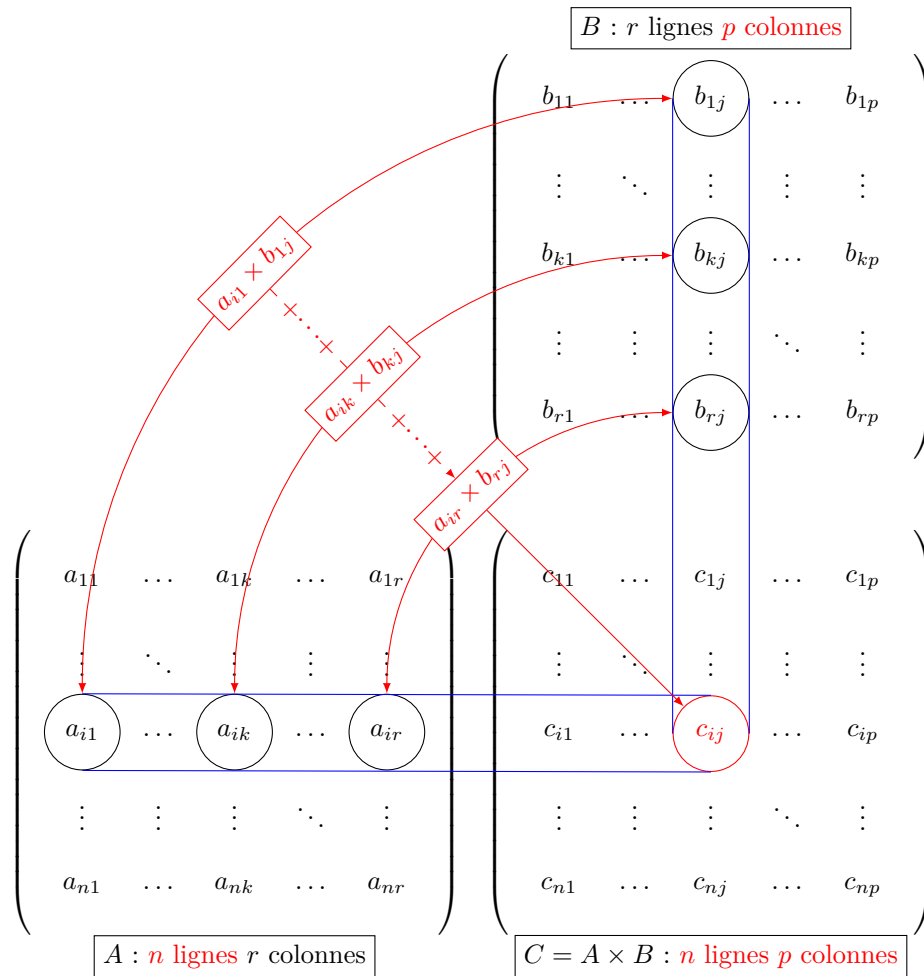
- Attention! On ne peut additionner ensemble que deux matrices de même taille.
- L'addition est commutative pour A et B deux matrices de même taille : $A + B = B + A$.
- L'addition est associative pour A , B et C trois matrices de même taille $(A + B) + C = A + (B + C)$ et l'on peut se passer des parenthèses et écrire $A + B + C$.
- La multiplication externe est distributive pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
- Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $kA = \underbrace{A + \dots + A}_{k \text{ fois}}$.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $A + 0_{n,p} = A$ et $\lambda 0_{n,p} = 0_{n,p}$.

Définition I.4

Soient $(n, r, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}} \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$. On définit le **produit matriciel** AB comme étant la matrice $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^r a_{i,k} b_{k,j}.$$

Remarque 4 : On ne peut multiplier AB que si $r =$ le nombre de colonnes de $A =$ le nombre de lignes de B . On obtient alors une matrice $C = AB$ avec un nombre de lignes $= n =$ nombre de lignes de A et avec un nombre de colonnes $= p =$ nombre de colonnes de B . Notamment, avec les notations de la définition, si $n \neq p$, on ne peut pas définir BA .



Exemple 5 : Retrouver les calculs suivants :

$$1. \begin{pmatrix} 1+i & -1 & 1 \\ 0 & 2i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -i \\ 2-i & 0 \\ 3 & 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-i & 1+2i \\ 11+4i & 9i \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. (1 \ 2 \ 3 \ 4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (10)$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3 \ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \text{?????}$$



Application : écriture matricielle d'un système

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne, alors le produit AX est donné par

$$AX = x_1 C_1 + \dots + x_p C_p = x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + \dots + x_p \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}.$$

Ainsi le système d'équations d'inconnues x_1, \dots, x_p avec $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ fixés :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

s'écrit

$$(S) \Leftrightarrow AX = B, \quad \text{où } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 6 : Le système $(S) : \begin{cases} 3x - 8y = \sqrt{2} \\ 7x + \pi y = 0 \end{cases}$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 7 & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Proposition I.5

Soient n, r et p trois entiers naturels non nuls.

- Le produit matriciel est bilinéaire :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K}), \forall B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad A(\lambda B_1 + \mu B_2) = \lambda AB_1 + \mu AB_2.$$

De même,

$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda A_1 + \mu A_2)B = \lambda A_1B + \mu A_2B.$$

- Le produit matriciel est associatif :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), \quad (AB)C = A(BC) = ABC.$$

- L'élément 0 est absorbant :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K}), \quad A0_{r,p} = 0_{n,p} = 0_{n,r}B.$$

Attention, on rappelle que si AB existe, alors BA n'est pas forcément défini et même si c'est le cas, nous avons en général $AB \neq BA$.

I.2 L'anneau des matrices carrées
Définition I.6

Si $n = p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices dites carrées c'est-à-dire pour lesquelles le nombre de lignes coïncide avec le nombre de colonnes.

Définition I.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice identité**, notée I_n , la matrice définie par $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où δ est le symbole de Kronecker :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} .$$

Autrement dit :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition I.8

1. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est stable addition, multiplication externe (par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$) et multiplication interne (de deux matrices). Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $A + B, \lambda A$ et $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. La matrice I_n est l'élément neutre pour la multiplication :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad AI_n = I_n A = A.$$

Démonstration.

1. Découle des définitions de la somme et des produits.
2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et par définition $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $B = AI_n$. Notons $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par définition du produit, on a pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$,

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \delta_{k,j}.$$

Or pour tout $k \neq j$, $\delta_{k,j} = 0$ et $\delta_{j,j} = 1$. Donc

$$b_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} a_{i,k} \delta_{k,j} + a_{i,j} \delta_{j,j} = 0 + a_{i,j} \times 1 = a_{i,j}.$$

Donc pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $b_{i,j} = a_{i,j}$ i.e. $B = A$. Conclusion, $AI_n = A$. On démontre de même que $I_n A = A$. \square

Anti-Proposition I.9

1. Le produit **N'EST PAS** commutatif. Dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il est toujours possible de définir AB et BA pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Cependant en général $AB \neq BA$!!
2. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre. La phrase suivante est **FAUSSE** :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad AB = 0_n \Rightarrow A = 0_n \text{ ou } B = 0_n,$$

autrement dit l'assertion suivante est vraie :

$$\exists (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0_n\})^2, \text{ tel que } AB = 0_n,$$

ou encore le produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle.

Exemple 7 : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $AB = 0_2$ pourtant $A \neq 0_2$ et $B \neq 0_2$. De plus $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $AB \neq BA$.

Remarque 8 : Du fait des bonnes propriétés de $+$ et \times dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau. De même que dans \mathbb{Z} (qui est aussi un anneau mais commutatif et intègre lui), on ne parle pas de division dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est ce qui différencie un anneau d'un corps (comme \mathbb{Q}, \mathbb{R} , ou \mathbb{C}).

Remarque 9 :

- Le fait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne soit pas commutatif implique que certains calculs vrais dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , ne le sont plus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par exemple les identités remarquables sont fausses en général :

$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

On ne peut qu'écrire

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

- Le fait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne soit pas intègre implique que certaines simplifications dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ne sont plus vraies dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par exemple, $AB = AC \Leftrightarrow A(B - C) = 0_n$ n'implique pas que $B = C$ même si $A \neq 0_n$.

Définition I.10

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **une matrice diagonale** si $\forall i \neq j$, on a $a_{i,j} = 0$. Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}).$$

L'ensemble des matrices diagonales à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 10 : La matrice $I_n \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. La matrice $A = \text{diag}(3, -3i, 0, \sqrt{5})$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$

Proposition I.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par addition et multiplication externe et multiplication interne : $\forall (A, B) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})^2, \lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \quad A + B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \quad AB \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}).$$

De plus si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $B = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, alors

$$\begin{aligned} \lambda A &= \text{diag}(\lambda \lambda_1, \dots, \lambda \lambda_n) \\ A + B &= \text{diag}(\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_n) \\ AB &= \text{diag}(\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_n). \end{aligned}$$

En particulier, deux matrices **diagonales** commutent : $AB = BA$.

Définition I.12

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **une matrice triangulaire supérieure** si $\forall i > j$, on a $a_{i,j} = 0$. Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 11 :

- On peut définir de même les matrices triangulaires inférieures.
- On a $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \subseteq \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.

Proposition I.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ est stable par addition et multiplication externe et multiplication interne :
 $\forall (A, B) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})^2, \lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda A \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K}), \quad A + B \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K}), \quad AB \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K}).$$

Remarque 12 : Attention le calcul du produit de deux matrices triangulaires est plus compliqué que celui de deux matrices diagonales et ne commute pas nécessairement. Tout ce que l'on peut affirmer dans le résultat concerne la diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}$$

II Calcul matriciel

II.1 Puissance d'une matrice

Définition II.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ la **puissance** $k^{\text{ième}}$ de A par récurrence :

$$A^0 = I_n \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad A^{k+1} = AA^k.$$

Remarque 13 :

- On ne peut définir la puissance $k^{\text{ième}}$ des matrices carrées uniquement. Pourquoi ?
- Pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}$, on a $A^k A^l = A^l A^k = A^{k+l}$.
- Cependant en général pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $(AB)^2 \neq A^2 B^2$. On peut seulement affirmer que $(AB)^2 = ABAB$.

Exemple 14 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer A^k .

Proposition II.2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A et B **COMMUTENT**, i.e. $AB = BA$. Alors

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad (A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k} \\ \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad A^m - B^m = (A - B) (A^{m-1} + A^{m-2} B + \dots + AB^{m-2} + B^{m-1}) \\ = (A - B) \sum_{k=0}^{m-1} A^{m-1-k} B^k$$

Application 15 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 2 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n et B^n .

II.2 Matrices inversibles

Définition II.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n.$$

Alors la matrice B est unique et est notée $B = A^{-1}$.

Démonstration. Démontrons l'unicité. Soient A, B_1 et B_2 trois matrices telles que $AB_1 = B_1A = AB_2 = B_2A = I_n$. Alors en multipliant $AB_1 = AB_2$ par B_1 par exemple, on obtient que

$$\underbrace{B_1A}_{=I_n} B_1 = \underbrace{B_1A}_{=I_n} B_2 \quad \Rightarrow \quad I_n B_1 = I_n B_2 \quad \Rightarrow \quad B_1 = B_2.$$

□

Exemple 16 :

1. Montrer que $D = \text{diag}(1/2, 1/3, 1/2)$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Théorème II.4 (admis)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. La matrice A est inversible.
2. Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$.
3. Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$.

De plus dans chacun des cas, $B = A^{-1}$.

Proposition II.5

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que la matrice $C = B^{-1}A^{-1}$ multipliée (à gauche ou à droite indifféremment d'après le théorème précédent) par AB donne bien I_n :

$$AB \times C = A \underbrace{BB^{-1}}_{=I_n} A^{-1} = AI_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

□

Définition II.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il est appelé le **groupe linéaire d'ordre n des matrices inversibles**.

Proposition II.7

L'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ muni de la multiplication matricielle est un groupe :

- $I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$,
- Si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $AB \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.
- Si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ alors A^{-1} existe et est un élément de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Proposition II.8

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ alors pour tout $r \in \mathbb{N}$, $A^r \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ de plus $(A^r)^{-1} = (A^{-1})^r$ et cette matrice est notée A^{-r} .

II.3 La transposée
Définition II.9

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de A la matrice $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket$ par

$$b_{i,j} = a_{j,i}.$$

La matrice B est alors notée A^T ou parfois tA .

On obtient A^T en permutant les lignes et les colonnes : les lignes de A^T sont les colonnes de A et les colonnes de A^T sont les lignes de A .

Exemple 17 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & \pi \\ 0 & 9 & 7 & -6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 9 \\ -4 & 7 \\ \pi & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -37 \\ -3 & \alpha^2 & 8 & -10 \\ 6 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ \alpha & 2 & \alpha^2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 1 \\ 3 & -37 & -10 & -4 \end{pmatrix}$$

Proposition II.10

La transposée est linéaire : soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Démonstration. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $A^T = (a'_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B^T = (b'_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$. Notez que pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$a'_{i,j} = a_{j,i} \quad \text{et} \quad b'_{i,j} = b_{j,i}.$$

1. Posons $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} = (A + B)^T$. Puisque

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

On en déduit que pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$c_{i,j} = a_{j,i} + b_{j,i} = a'_{i,j} + b'_{i,j}$$

Par conséquent, on a bien $(A + B)^T = C = A^T + B^T$.

2. Posons $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} = (\lambda A)^T$. Puisque $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, on en déduit que pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$c_{i,j} = \lambda a_{j,i} = \lambda a'_{i,j}.$$

Ainsi $(\lambda A)^T = C = \lambda A^T$.

□

Proposition II.11

Soient $n, m, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$. On a

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Démonstration. Soient

$$\begin{aligned}
 A &= (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) & A^T &= (a'_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\
 B &= (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K}) & B^T &= (b'_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K}) \\
 C &= (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = AB \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & C^T &= (c'_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\
 D &= (d_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} = B^T A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})
 \end{aligned}$$

Par définition du produit,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^m a_{i,k} b_{k,j}.$$

Donc en appliquant la transposée, on obtient que

$$\begin{aligned}
 \forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket, \quad c'_{i,j} &= c_{j,i} = \sum_{k=1}^m a_{j,k} b_{k,i} \\
 &= \sum_{k=1}^m a'_{k,j} b'_{i,k} \\
 &= \sum_{k=1}^m b'_{i,k} a'_{k,j} \\
 &= d_{i,j}
 \end{aligned}$$

On en déduit donc que $C^T = D$ autrement dit :

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

□

Corollaire II.12

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Démonstration. Posons $B = (A^{-1})^T$. Montrons que $B = (A^T)^{-1}$ i.e. $BA^T = I_n$. Or par la proposition précédente,

$$BA^T = (A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n.$$

Conclusion, $B = (A^T)^{-1}$.

□

Définition II.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **symétrique** si

$$A^T = A$$

c'est-à-dire si pour tout $1 \leq i, j \leq n$, $a_{i,j} = a_{j,i}$.

L'ensemble des matrices d'ordre n symétriques à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 18 : La matrice $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 12 \\ -5 & 0 & -4 \\ 12 & -4 & 39 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est symétrique.

Définition II.14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **antisymétrique** si

$$A^T = -A$$

c'est-à-dire si pour tout $1 \leq i, j \leq n$, $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

L'ensemble des matrices d'ordre n antisymétriques à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 19 : Une matrice antisymétrique a nécessairement tous ses coefficients diagonaux nuls.

Exemple 20 : La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 12 \\ 5 & 0 & -4 \\ -12 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est antisymétrique.

Proposition II.15

Les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont stables par combinaison linéaires.

- Si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ alors $\lambda A + \mu B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
- Si $A, B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ alors $\lambda A + \mu B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

II.4 La trace

Définition II.16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A notée $\text{tr}(A)$ l'élément dans \mathbb{K} défini comme étant la somme des éléments diagonaux de A :

$$\text{tr}(A) = \sum_{k=0}^n a_{i,i}.$$

Exemple 21 :

- Si $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & 14 \\ 5 & 9 & 13 \end{pmatrix}$ alors $\text{tr}(A) = -4 - 1 + 13 = 8$.
- Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, alors $\text{tr}(A) = 0$.
- $\text{tr}(I_n) = n$.

Proposition II.17

La trace est linéaire : pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
2. $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$.

Proposition II.18

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

Démonstration. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\text{tr}(AB) = \text{tr} \left(\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i}.$$

Par propriété sur les sommes rectangulaires :

$$\text{tr}(AB) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,k}.$$

En renommant les indices, on obtient que

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i} = \operatorname{tr} \left(\left(\sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right) = \operatorname{tr}(BA).$$

□

III Lien avec les systèmes linéaires

III.1 Complément sur les systèmes linéaires

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ deux entiers non nuls, $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$ une famille d'éléments de \mathbb{K} et $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ un n -uplet d'éléments de \mathbb{K} . On considère alors le système (S) d'inconnu $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ défini par

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,j}x_j + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 & L_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,j}x_j + \dots + a_{i,p}x_p = b_i & L_i \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,j}x_j + \dots + a_{n,p}x_p = b_n & L_n \end{cases}$$

Définition III.1

On appelle **matrice associée** au système (S) la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ci-dessous. Le second membre (b_1, \dots, b_n) , respectivement l'inconnue (x_1, \dots, x_p) est également noté sous forme matricielle B respectivement X .

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Le système (S) est alors équivalent à l'équation matricielle suivante d'inconnue le vecteur colonne $X \in \mathbb{K}^n$:

$$AX = B.$$

Remarque 22 : Dans le cas d'une matrice carrée inversible : si $n = p$ et si $A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$ alors le système $AX = B$ admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$. Résoudre le système (S) est alors équivalent à calculer A^{-1} .

Définition III.2

- Si pour tout $j \in \llbracket 1;p \rrbracket$, $b_j = 0$ alors le système

$$(S_0) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,j}x_j + \dots + a_{1,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,j}x_j + \dots + a_{i,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,j}x_j + \dots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

est dit **homogène**. Autrement dit, avec les notations matricielles, un système est homogène si $B = 0_{n,1}$: $AX = 0_{n,1}$.

- On appelle **système homogène associé** au système (S) , noté (S_0) , le système linéaire ayant les mêmes coefficients que (S) et de second membre nul.

Définition III.3

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)$ et (S) un système linéaire de n équations et p inconnues.

1. Un système qui n'admet pas de solution est dit **incompatible**.
2. Un système qui admet des solutions est dit **compatible**.

Remarque 23 :

- Avec la notation matricielle $AX = B$, un système est compatible si et seulement B est combinaison linéaire des colonnes de A .
- On rappelle qu'un système homogène est toujours compatible car alors $X = 0_{p,1}$ est toujours UNE solution.

Proposition III.4

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un espace vectoriel.

Démonstration. Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, (S) le système $AX = 0_{n,1}$ et \mathcal{S}_0 l'ensemble des solutions de (S_0) :

$$\mathcal{S}_0 = \{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{n,1} \}.$$

Montrons que \mathcal{S}_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

- $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ par définition de \mathcal{S}_0 .
- Si $X = 0_{p,1}$, alors $AX = 0_{n,1}$. Donc $0_{p,1} \in \mathcal{S}_0$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(X, Y) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})^2$. Posons $Z = \lambda X + \mu Y$. Alors, on observe que

$$\begin{aligned} AZ &= A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY && \text{par propriété des opérations matricielles} \\ &= \lambda 0_{n,1} + \mu 0_{n,1} && \text{car } X \in \mathcal{S}_0 \text{ et } Y \in \mathcal{S}_0. \\ &= 0_{n,1}. \end{aligned}$$

Donc $Z = \lambda X + \mu Y \in \mathcal{S}_0$ et \mathcal{S}_0 est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, \mathcal{S}_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et est donc lui-même un espace vectoriel. □

Exemple 24 : Déterminer sous forme vectorielle l'ensemble des solutions des systèmes suivants

$$1. (S_1) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \quad 2. (S_2) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad 3. (S_3) : \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ z + 2t = 0 \end{cases}$$

Proposition III.5

Soient (S) un système linéaire compatible, \mathcal{S}_0 l'ensemble des solutions du système homogène (S_0) associé et $X_p \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ UNE solution de (S) . Alors, \mathcal{S} , l'ensemble des solutions de (S) est donné par

$$\mathcal{S} = X_p + \mathcal{S}_0 = \{ X_p + X_0 \mid X_0 \in \mathcal{S}_0 \}.$$

III.2 Version matricielle des opérations élémentaires

Définition III.6

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{1, \dots, n\}$ et $l \in \{1, \dots, p\}$. On appelle **matrice élémentaire**, notée $E_{k,l}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf $a_{k,l}$ qui vaut 1 :

$$E_{k,l} = (\delta_{ik}\delta_{lj})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

où pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker défini par $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exemple 25 : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ il y a 4 matrices de ce type :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition III.7

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire des matrices élémentaires E_{kl} . De plus cette décomposition est unique.

Remarque 26 : On dit que la famille de matrices $(E_{kl})_{(k,l) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$ est une base de l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration. Il en effet évident que toute matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$ s'écrit : $A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} E_{ij}$. □

Exemple 27 : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ s'écrit $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque 28 : Soient $n, m, p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $u \in \llbracket 1;n \rrbracket$, $v \in \llbracket 1;m \rrbracket$, $k \in \llbracket 1;m \rrbracket$ et $l \in \llbracket 1;p \rrbracket$, on a

$$E_{uv} \times E_{kl} = \begin{cases} E_{ul} & \text{si } v = k \\ 0 & \text{si } v \neq k \end{cases}$$

Par exemple, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$:

$$E_{12}E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22}E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve alors la formule du produit :

$$AB = \left(\sum_{(i,k) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;m \rrbracket} a_{i,k} E_{ik} \right) \left(\sum_{(l,j) \in \llbracket 1;m \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket} b_{l,j} E_{lj} \right).$$

Nous sommes dans le cas de sommes à variables séparées (cf chapitre IV calcul algébrique). On a donc

$$AB = \sum_{(i,k,l,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;m \rrbracket \times \llbracket 1;m \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket} a_{i,k} b_{l,j} E_{ik} E_{lj}$$

Seuls les termes où $k = l$ seront non nuls. On obtient donc

$$AB = \sum_{(i,k,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;m \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket} a_{i,k} b_{k,j} E_{ij} = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^m a_{i,k} b_{k,j} \right)}_{=\text{coefficient } i, j \text{ de la matrice } AB} E_{ij}.$$

Définition III.8

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

1. La matrice $T_{i,j}$ définie par

$$T_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji},$$

est appelée **matrice de transposition**.

2. La matrice $D_i(\lambda)$ définie par

$$D_i(\lambda) = I_n - E_{ii} + \lambda E_{ii},$$

est appelée **matrice de dilatation**.

3. La matrice $U_{ij}(\lambda)$ définie par

$$U_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij},$$

est appelée **matrice de transvection**.

Proposition III.9 (opérations élémentaires)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dans ce qui suit, les matrices sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, λ **non nul**.

1. Multiplier A à gauche par $T_{i,j}$ revient à échanger la ligne i et j de la matrice A .
Autrement dit, $T_{i,j}A$ se déduit de A par l'opération élémentaire de **permutation/transposition** : $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. Multiplier A à gauche par $D_i(\lambda)$ revient à multiplier la ligne i de la matrice A par λ .
Autrement dit, $D_i(\lambda)A$ se déduit de A par l'opération élémentaire de **dilatation** : $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
3. Multiplier A à gauche par $U_{ij}(\lambda)A$ revient à ajouter à la ligne i , λ fois la ligne j de la matrice A .
Autrement dit, $U_{ij}(\lambda)A$ se déduit de A par l'opération élémentaire de **transvection** : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Remarque 29 : Soit E l'une de ces matrices. Puisque $E = E \times I_n$, la matrice E se déduit de I_n en effectuant l'opération élémentaire correspondante à E .

Exemple 30 : Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$:

$$T_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D_2(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U_{13}(-4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Traduction matricielle des opérations élémentaires sur les colonnes. En multipliant à droite, on obtient les opérations élémentaires sur les colonnes :

1. La matrice AT_{ij} se déduit de A par l'opération élémentaire : $C_j \leftrightarrow C_i$.
2. La matrice $AD_i(\lambda)$ se déduit de A par l'opération élémentaire : $C_i \leftarrow \lambda C_i$.
3. La matrice $AU_{ij}(\lambda)$ se déduit de A par l'opération élémentaire : $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.

Attention! dans ce dernier point à la différence avec les opérations sur les lignes.

Remarque 31 : Grâce à l'interprétation de la proposition III.9, on vérifie facilement les propriétés suivantes :

1. T_{ij} est inversible, d'inverse elle-même : $T_{ij} \times T_{ij} = I_n$.
2. $D_i(\lambda) \times D_i(\mu) = D_i(\lambda\mu)$.
3. $D_i(1) = I_n$.
4. Pour tout $\lambda \neq 0$, $D_i(\lambda)$ est inversible est $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(1/\lambda)$.
5. $U_{ij}(0) = I_n$.
6. $U_{ij}(\lambda) \times U_{ij}(\mu) = U_{ij}(\lambda + \mu)$.
7. $U_{ij}(\lambda)$ est inversible et $U_{ij}(\lambda)^{-1} = U_{ij}(-\lambda)$.

Définition III.10

Deux matrices M et M' sont dites **équivalentes en lignes** (respectivement **en colonnes**) si l'on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes (respectivement les colonnes). On note $M \underset{\mathcal{L}}{\sim} M'$ (respectivement $M \underset{\mathcal{C}}{\sim} M'$).

Remarque 32 : Si $M \underset{\mathcal{L}}{\sim} M'$ alors on passe de M à M' en faisant des opérations élémentaires. En faisant les opérations élémentaires inverses à M' , on retrouve M et donc on a $M \underset{\mathcal{L}}{\sim} M'$.

III.3 Calcul de l'inverse d'une matrice

Proposition III.11

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $A \underset{\mathcal{L}}{\sim} B$, alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $B \in GL_n(\mathbb{K})$. Autrement dit, les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.

Remarque 33 : On a la même propriété si $A \underset{\mathcal{C}}{\sim} B$.

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $A \underset{\mathcal{L}}{\sim} B$. Puisque B est équivalente à A , alors il existe E_1, E_2, \dots, E_p des matrices d'opérations élémentaires (permutation, dilatation non nulle, transvection) telles que $B = E_p \cdots E_2 E_1 A$. On sait que les E_i sont inversibles (cf remarque 31) et A est inversible par hypothèse. Dès lors, B est une matrice inversible en tant que produit de matrices inversibles et $B^{-1} = A^{-1} E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_p^{-1}$. Réciproquement si B est inversible car $A \underset{\mathcal{L}}{\sim} B \Leftrightarrow B \underset{\mathcal{L}}{\sim} A$. □

Proposition III.12

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \Leftrightarrow \quad A \underset{\mathcal{L}}{\sim} I_n \quad \Leftrightarrow \quad A \underset{\mathcal{L}}{\sim} I_n.$$

Démonstration. (\Rightarrow) admis.

(\Leftarrow) Si $A \underset{\mathcal{L}}{\sim} I_n$. Puisque $I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ alors par la propriété précédente, on a $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. □

On peut aller plus loin et donner même une méthode systématique pour **calculer en pratique** l'inverse d'une matrice!

1. On applique l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice A jusqu'à obtenir la matrice I_n . L'algorithme ne faisant que des opérations élémentaires, on trouve alors que $E_p \cdots E_2 E_1 A = I_n$.
2. On en déduit que A est inversible.
3. Mieux, si l'on souhaite calculer A^{-1} on observe que $A^{-1} = E_p \cdots E_2 E_1$. On sait que pour obtenir E_1 , il suffit d'effectuer l'opération élémentaire à I_n . De même pour obtenir $E_2 E_1$, on effectue l'opération de E_1 à I_n puis l'opération de E_2 à la matrice précédemment obtenue. Ainsi de suite, il est possible de calculer A^{-1} sans trop d'efforts.

Exemple 34 : En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{array}{lcl}
 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} & \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array} & \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 & \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 \underset{\mathcal{L}}{\sim} I_3 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

Puisque $A \underset{\mathcal{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que A est inversible. De plus,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie systématiquement son résultat en calculant $A^{-1}A$, on observe bien que $A^{-1}A = I_3$.

Remarque 35 :

- Le même travail peut être effectué en effectuant des opérations élémentaires sur les colonnes de A .

- Attention cependant à ne pas mélanger les opérations sur les lignes et celles sur les colonnes. Ou vous choisissez de ne faire QUE des opérations sur les lignes OU (exclusif) vous choisissez de ne faire QUE des opérations sur les colonnes, mais n'alternez pas les deux dans une même recherche d'inverse.

Exemple 36 : Démontrer l'inversibilité et calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ par des opérations sur les lignes puis recommencer par des opérations sur les colonnes.

Proposition III.13

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{ est inversible} \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{i,i} \neq 0 \Leftrightarrow \prod_{i=1}^n a_{i,i} \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{ est inversible} \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{i,i} \neq 0 \Leftrightarrow \prod_{i=1}^n a_{i,i} \neq 0$$

Remarque 37 : Une matrice diagonale étant une matrice triangulaire (supérieure mais aussi inférieure) on peut lui appliquer la propriété précédente :

$$A = \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{i,i} \neq 0 \Leftrightarrow \prod_{i=1}^n a_{i,i} \neq 0.$$

Démonstration. Démontrons juste le sens direct. Puisque tous les $a_{i,i}$ sont non nuls, il est possible d'effectuer les dilatations $L_i \leftarrow \frac{1}{a_{i,i}} L_i$, on obtient alors que

$$A \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue alors pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $L_i \leftarrow L_i - b_{i,n} L_n$, on a alors

$$A \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & \ddots & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En poursuivant, on obtient que des 0 dans la colonne $n-1$ sauf sur la diagonale puis de même en colonne $n-2$ etc. Finalement, $A \underset{\mathcal{L}}{\sim} I_n$ et donc par la proposition III.12, on en déduit que A est bien inversible. \square

IV Prochainement... Analyse asymptotique - Equivalents usuels

Soient $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ avec $a_n \neq 0$, $(b_p, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n-p+1}$ avec $b_p \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

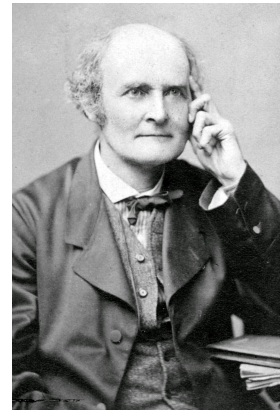
$\sum_{k=p}^n a_k x^k \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p$		$\sum_{k=0}^n a_k x^k \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n$
$e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$		$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$		$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$		$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
$\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$		$\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
$\arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$		$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
$\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \text{sh}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$		$\arctan(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$

CAYLEY Arthur (Richmond (Angleterre) 1821 - Cambridge 1895) passa les huit premières années de sa vie à Saint-Petersbourg, ville où ses parents faisaient du commerce. Il étudia au Trinity College de Cambridge et débuta en tant qu'avocat avant d'obtenir une chaire de mathématiques pures à Cambridge où il put se consacrer entièrement à sa passion. Il fit pratiquement toute sa carrière à Cambridge.

Cayley semble avoir eu toutes les vertus : une gentillesse reconnues de tous, une mémoire hors du commun, des dons artistiques et même des aptitudes sportives supérieures. Esprit romanesque et polyglotte, il dévore plus de mille romans dans plusieurs langues. Passionné d'escalade il se rendait souvent sur le continent pour ses excursions. Il expliquait que l'ascension lente et difficile rendait exaltant le triomphe d'atteindre le sommet. Il comparait cette expérience à la réussite d'un problème délicat ou l'élaboration d'une théorie difficile.

Cayley est sans doute, après Euler et Cauchy, le plus prolifique des mathématiciens : ses oeuvres comportent neuf cent soixante-six articles remplissant treize volumes de six cents pages et concernent tous les domaines mais surtout la géométrie et l'algèbre linéaire (dont font partie les matrices).

Il est souvent considéré comme l'inventeur des matrices même si le déterminant (cf fin d'année pour nous) existait déjà sous forme de tableau. Il définit la somme, le produit, la transposée, les matrices symétriques, antisymétriques et donne l'inverse des matrices 3×3 . Il énonce le théorème donnant l'équation caractéristique d'une matrice (cf l'année prochaine) ainsi que le théorème de Cayley-Hamilton. Théorème qu'il démontre pour $n = 2$, prétend l'avoir fait pour $n = 3$ et soutient qu'il n'est pas nécessaire d'apporter une preuve en dimension supérieure... Hum, hum. Frobenius en 1878 apportera la première démonstration générale.



On organise une compétition entre un polytechnicien, un gadzart, un normalien, un étudiant de science-po et un étudiant de HEC. On leur soumet le problème de baromètre de Bohr : on leur donne un baromètre et on leur demande de mesurer la hauteur d'un phare.

Le polytechnicien prend sa montre en main, fonce, avale quatre à quatre les marches lâche son baromètre du haut du phare et mesure le temps que celui-ci met à atteindre le sol. En négligeant le frottement il obtient ainsi une approximation de la hauteur du phare.

Le gadzart s'écrit « c'est facile ! J'ai compris ! » il s'élançe, monte en haut du phare mais lâche sa montre au lieu du baromètre...

Le normalien, n'ayant plus fait de sport depuis... heu toujours en fait. Pose le baromètre au sol mesure sa hauteur, celle de son ombre, celle de l'ombre de l'immeuble. Puis affirme hautain : « Bref, on utilise Thalès, l'enfance de l'art quoi. »

L'étudiant de science-po, devant la naïveté de tous ces péquenots, est parti en voiture aller voir le cousin du cousin de son père qui a été préfet dans la région, il n'y a pas de meilleure source.

L'étudiant de HEC a déjà la réponse, il a vendu son baromètre au gardien du phare en échange de l'information.