Chapitre XV : Suites numériques

I Définition et exemples

I.1 Définition générale

Définition I.1

On appelle **suite réelle** toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, l'image de n par u est notée $u_n \in \mathbb{R}$ et l'application u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles.

Remarque 1 :

- Une suite est donc une famille indexé par $\mathbb{N}$.
- Il se peut qu'une suite ne soit définie qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$. On note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ l'application $\mathbb{N}\cap[n_0; +\infty[= [\![n_0; +\infty[\![\to \mathbb{R}$ associée. Quitte à décaler (ou shifter en franglish) la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ en considérant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n+n_0})_{n\in\mathbb{N}}$, on peut toujours se ramener à une suite définie sur $\mathbb{N}$. C'est pourquoi les résultats qui suivent seront énoncés sur $\mathbb{N}$.
- Attention, les objets $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, u_n et $\{ u_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ sont de nature mathématique différente ! La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction, u_n est UN ET UN SEUL réel et $\{ u_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble, celui des image de la suite. Par exemple si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$, on considère la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si on fixe $n \in \mathbb{N}$ alors u_n est un réel (valant 1 si n est pair et -1 sinon) tandis que l'ensemble image est $\{ u_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1; 1\}$ ne contient que deux éléments et n'est pas égal à la SUITE $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.2 Modes de définition d'une suite

De façon explicite.

On fournit une formule pour tout $n \in \mathbb{N}$ permettant de calculer u_n directement en fonction de n. On vérifie directement dans ce cas que chaque terme est bien défini.

Exemple 2 : Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{\mathrm{e}^n - 4n^3}{\ln(n+2)}$ est donnée de façon explicite. Cette suite est bien définie sur $\mathbb{N}$. En effet pour $n \in \mathbb{N}$, on a les équivalences suivantes :

$$u_n \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ln(n+2) \neq 0 \\ n+2 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} n+2 \neq 1 \\ n+2 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad n > -1.$$

La dernière assertion étant vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie sur $\mathbb{N}$.

Exemple 3 : Les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sqrt{n}$ et $w_n = (-5)^n$ sont bien définies sur $\mathbb{N}$ de façon explicite.

De façon implicite.

Chaque terme u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie comme étant une solution d'une équation. Dans cette définition le terme u_n n'est pas donné directement en fonction de n.

Exemple 4 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle u_n la solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation

$$x^n + x^2 + 2x - 1 = 0. \tag{E_n}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ? En d'autres mots, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation (E_n) admet-elle une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$? Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + x^2 + 2x - 1$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$ ($x \mapsto x^n$ si $n \neq 0$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 2x - 1$, si $n = 0$, considérer simplement $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 2x$). De plus, on a $f_n(0) = -1$ si $n \neq 0$ et $f_0(0) = 0$. Dans tous les cas $f_n(0) \leqslant 0$ et $f_n(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. Donc par la version strictement monotone du théorème des valeurs intermédiaires (ou conséquence du théorème de la bijection), il existe un unique réel $u_n \in \mathbb{R}$ solution de (E_n). Finalement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie sur $\mathbb{N}$ bien que l'on ne connaisse pas explicitement la valeur de u_n (on peut en donner un encadrement entre 0 et 1 car $f_n(1) = 2 > 0$ et même construire un algorithme donnant une approximation numérique).

Par récurrence simple.

Définition I.2

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence s'il existe $U \subseteq \mathbb{R}$ tel que

1. on fixe le premier terme u_0 dans U,
2. il existe $f : U \to \mathbb{R}$, laissant U stable : $f(U) \subseteq U$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Remarque 5 : Si f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, tout va bien. Eventuellement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut atterrir dans U qu'à partir d'un certain rang n_0.

Démonstration. Démontrons que si $U \subseteq \mathbb{R}$ tel que f est bien définie sur U, $f(U) \subseteq U$ et tel que $u_0 \in U$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Par récurrence démontrons la propriété

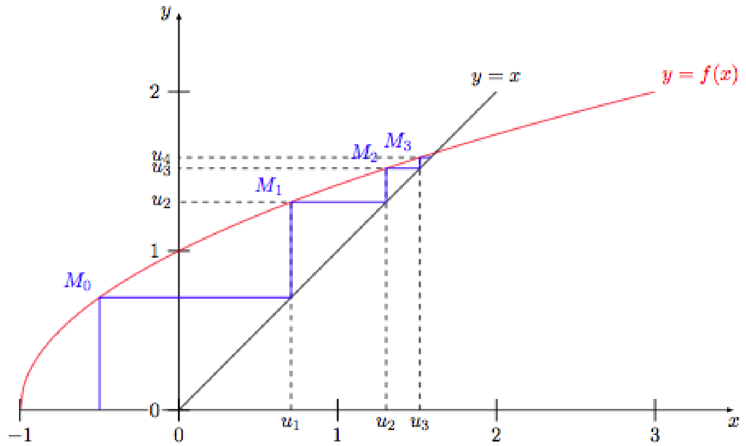
$$\mathscr{P}(n) : \quad \text{« } u_n \text{ est bien définie et } u_n \in U \text{ ».}$$

Initialisation. Le terme u_0 est bien définie et appartient à U par hypothèse donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors u_n est bien définie et $u_n \in U$. Or f est bien définie sur U donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini. De plus $u_n \in U$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \in f(U)$. Or $f(U) \subseteq U$ donc $u_{n+1} \in U$. On a donc montré que $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie et en particulier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. □

Exemple 6 :

- On pose $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
- On pose $v_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n - 1}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est mal définie ! En effet $v_1 = 2$, $v_2 = 1$, $v_3 = 0$ mais v_4 n'existe pas car $v_3 \notin [1; +\infty[$, l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}$.
- On pose $w_0 = -1/2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \sqrt{w_n + 1}$. La fonction $g : x \mapsto \sqrt{x+1}$ est définie sur $U = [-1; +\infty[$. On a d'une part, par monotonie de g, $g(U) = g([-1; +\infty[) = [0; +\infty[\subseteq [-1; +\infty[$ et d'autre part $w_0 = -1/2 \in U$. Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie sur $\mathbb{N}$ (et à valeurs dans U).

Voici une représentation graphique de la dernière suite :



Par récurrence double.

Définition I.3

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par **récurrence double** par

1. la donnée de u_0 et u_1
2. et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$.

Exemple 7 : La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

I.3 Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques

Proposition I.4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.
2. Il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
3. Il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{(u_0 + u_n)}{2} = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}.$$

Proposition I.5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
2. Il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.
3. Il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \begin{cases} u_{n_0}\frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n-n_0+1)u_{n_0} & \text{si } q = 1 \end{cases}.$$

Définition I.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique s'il existe $(q, r) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = qu_n + r.$$

Remarque 8 :

- Si $q \in \{0, 1\}$ ou $r = 0$ alors la suite est une suite constante, arithmétique ou géométrique.
- Sinon, une suite arithmético-géométrique n'est ni arithmétique ni géométrique.

Méthodes de résolution.

On se place dans les cas où $q \notin \{0, 1\}$ et $r \neq 0$. On cherche le point fixe de la relation de récurrence. Soit $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$\omega = q\omega + r \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = \frac{r}{1-q}.$$

On pose alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \omega$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \omega = (qu_n + r) - (q\omega + r) = q(u_n - \omega) = qv_n.$$

Par conséquent, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = q^n v_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad u_n = q^n(u_0 - \omega) + \omega.$$

Notez la simili... enfin la ressemblance avec les similitudes complexes.

Exemple 9 : Déterminer une formule explicite du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

I.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition I.7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre** 2 s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On appelle **équation caractéristique** associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'équation d'inconnue $r \in \mathbb{R}$ donnée par

$$r^2 - ar - b = 0.$$

Proposition I.8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2, (E_c) son équation caractéristique et Δ le discriminant associé.

- Si $\Delta > 0$, (E_c) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Alors il existe deux réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si $\Delta = 0$, (E_c) admet une unique racine double r_0. Alors il existe deux réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)\, r_0^n.$$

- Si $\Delta < 0$, (E_c) admet deux racines complexes conjugués $r_1 = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ et $r_2 = r\,\mathrm{e}^{-i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = r^n \left(\lambda \cos(\theta n) + \mu \sin(\theta n)\right).$$

Remarque 10 :

- On ne parle ici que de suites récurrentes linéaires **réelles**.
- Notez les ressemblances avec les équations différentielles mais aussi et SURTOUT les différences !
- Dans chaque cas, les réels λ et μ sont entièrement déterminés par les deux premiers termes u_0 et u_1 de la suite.
- Dans chacun des cas, l'ensemble des suites solutions est un espace vectoriel de dimension deux, engendré par deux solutions particulières :

$$\mathrm{Vect}\left((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \qquad \mathrm{Vect}\left((r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \qquad \mathrm{Vect}\left((r^n\cos(\theta n))_{n\in\mathbb{N}}, (r^n\sin(\theta n))_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Exemple 11 : On considère la suite de Fibonacci classique : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de u_n en fonction de n.

II Rappels : monotonie et limite

II.1 Monotonie

Définition II.1

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si

- elle est croissante i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- elle est décroissante i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

On dit qu'une suite est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang i.e. s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

Remarque 12 : On a les définitions analogues pour la stricte monotonie.

Méthodes pour déterminer le sens de variation.

1. On déterminer le signe de $u_{n+1}-u_n$. Si celui-ci est toujours positif (respectivement strictement positif), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (respectivement strictement croissante), si celui-ci la suite est négatif (respectivement strictement négatif), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (respectivement strictement décroissante), si celui-ci est nul la suite est constante, sinon la suite n'est pas monotone.
2. Si la suite est **à termes strictement positifs**, on regarde si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur ou égal ou non à 1.
3. Si la suite est définie de façon explicite $u_n = f(n)$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors si f est monotone sur $\mathbb{R}_+$, le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le même que celui de f.

Exemple 13 :

1. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
2. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n!$.
3. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{\arctan(n)}{n}$.

Exemple 14 :

1. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n$.
2. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(n+3)u_n$.

Proposition II.2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$.
1. Si la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone :
   croissante si $u_0 \leqslant u_1$ et décroissante si $u_0 \geqslant u_1$.
2. Si la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ N'est PAS monotone.

Démonstration. Montrons le cas f croissante et $u_0 \leqslant u_1$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1}$ ».
Initialisation. Par construction de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $u_0 \leqslant u_1$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ i.e. $u_n \leqslant u_{n+1}$. Alors par croissance de la fonction f, on a

$$f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}).$$

Or $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_{n+2} = f(u_{n+1})$. Donc,

$$u_{n+1} \leqslant u_{n+2}.$$

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ i.e. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

□

Exemple 15 :

1. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$.
2. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1/2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$.
3. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$.

Remarque 16 : Pour les suites définies par récurrence, il est aussi possible d'étudier le signe de $f(x) - x$ pour en déduire sa monotonie. Reprendre les exemples précédents par cette méthode.

II.2 Limite

Définition II.3

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe dans $\mathbb{R}$. Autrement si et seulement si
$$\exists l \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - l| \leqslant \varepsilon\,.$$
On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
- Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.
- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $-\infty$). Autrement dit
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant A \text{ (respectivement } u_n \leqslant A).$$

Exemple 17 : La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente.

Proposition II.4

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Proposition II.5

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Notons $l \in \mathbb{R}$ sa limite. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, pour $\varepsilon = 1$ par exemple, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - l| \leqslant 1$ i.e. $l - 1 \leqslant u_n \leqslant l + 1$. Puisque n_0 est fixé l'ensemble $\{u_0, \dots, u_{n_0}, l+1\}$ est un ensemble fini et fixe. Notons M son maximum, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$. On démontre de même que pour $m = \min\{u_0, \dots, u_{n_0}, l-1\}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. $\square$

Remarque 18 : La réciproque est fausse. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par exemple est une suite bornée mais divergente.

Proposition II.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $l > 0$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l alors la suite est strictement positive à partir d'un certain rang :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \quad u_n > 0.$$

Démonstration. Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et que $l > 0$ alors en posant $\varepsilon = \frac{l}{2}$, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon = \frac{l}{2}$ i.e. $l - \frac{l}{2} \leqslant u_n \leqslant l + \frac{l}{2}$. En particulier, pour tout $n \geqslant n_0$, on a
$$u_n \geqslant \frac{l}{2} > 0.$$
$\square$

Proposition II.7

La limite de la somme, du produit, de l'inverse, de la multiplication par un réel de suites est la somme, le produit, l'inverse, la multiplication par un réel des limites lorsque cela existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. De plus pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |l|$ (réciproque fausse).
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Remarque 19 : La somme de deux suites convergentes est convergente, la somme d'une suite divergente et d'une suite convergente est divergente MAIS on ne peut rien dire de la somme de deux suites divergentes et l'égalité $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n$ peut être fausse dans ce cas.

Proposition II.8

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = l'$. Alors $l \leqslant l'$.

Théorème II.9 (Théorème d'encadrement)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Théorème II.10 (Limite monotone)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (respectivement décroissante).
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (respectivement minorée).

Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (respectivement vers $l = \inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$).

Exemple 20 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Que dire de la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Le démontrer.

III Suites extraites, adjacentes, sommes de Cesàro

III.1 Suites extraites

Définition III.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Si φ est strictement croissante, on dit que φ est une extractrice et la suite définie par $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est **une suite extraite** ou **une sous-suite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 21 :

- La suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 22 : Du fait que φ est strictement croissante, on démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.

Proposition III.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle tendant vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors toute sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers l.

Démonstration. Traitons le cas où $l \in \mathbb{R}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - l| \leqslant l$. Soit φ une fonction strictement croissante. Par la remarque précédente, on a pour tout $n \geqslant n_0$, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$ et donc pour tout $n \geqslant n_0$, $\left|u_{\varphi(n)} - l\right| \leqslant \varepsilon$ ce qui signifie que $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. $\square$

Remarque 23 : En pratique, on se sert souvent de la contraposée pour démontrer qu'une suite ne converge pas.

1. La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ diverge car $u_{2n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.
2. La suite de terme général $u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ est divergente car $u_{4n} = (-1)^n$ diverge.

Proposition III.3

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers l.

III.2 Suites adjacentes

Définition III.4

On dit que deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** si et seulement si elles vérifient les propriétés suivantes.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. La suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarque 24 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. Alors la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. Donc $0 = \inf\{\, v_n - u_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geqslant 0$ ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n \geqslant u_n.$$

Proposition III.5

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes alors elles convergent et ont une limite commune :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Démonstration. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, on a vu dans la remarque précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leqslant v_n$. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante on obtient en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0. Par le théorème de convergence monotone, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l_1 = \sup\{\, u_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$. De la même façon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$. Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0. Par le théorème de convergence monotone, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l_2 = \inf\{\, v_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$. Par conséquent $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_2 - l_1$. Or on sait que $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par unicité de la limite, $l_2 = l_1$. $\square$

III.3 Moyenne de Cesàro

Définition III.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle **moyenne de Cesàro** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$c_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Démonstration. Traitons le cas $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ ou encore pour tout $n \geqslant n_0$,

$$l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant l + \varepsilon\,.$$

Soit $n > n_0$, on a

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} (\ell - \varepsilon) \leqslant c_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} (\ell + \varepsilon)\,.$$

Donc,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k + \frac{n - n_0}{n}(\ell - \varepsilon) \leqslant c_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k + \frac{n - n_0}{n}(\ell + \varepsilon)$$

i.e.

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k - n_0(\ell - \varepsilon)\right) + \ell - \varepsilon \leqslant c_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k - n_0(\ell + \varepsilon)\right) + \ell + \varepsilon\,.$$

Or puisque n_0 est fixé, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k - n_0\,(\ell-\varepsilon)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k - n_0\,(\ell+\varepsilon)$ sont deux réels fixés. Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k - n_0\,(\ell-\varepsilon)\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k - n_0\,(\ell+\varepsilon)\right) = 0.$$

Par conséquent, il existe $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que

$$\forall n \geqslant n_1, \qquad -\varepsilon \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k - n_0\,(\ell-\varepsilon)\right) \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant n_2, \qquad -\varepsilon \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k - n_0\,(\ell+\varepsilon)\right) \leqslant \varepsilon$$

Alors, on obtient que pour tout $n \geqslant n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$,

$$\begin{aligned} -\varepsilon + \ell - \varepsilon \leqslant c_n \leqslant \varepsilon + \ell + \varepsilon \qquad &\Leftrightarrow \qquad l - 2\,\varepsilon \leqslant c_n \leqslant l + 2\,\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \qquad |c_n - l| \leqslant 2\,\varepsilon\,. \end{aligned}$$

En résumer, pour tout $\varepsilon' = 2\,\varepsilon > 0$, il existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_3$, on a $|c_n - l| \leqslant \varepsilon'$. Par définition, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

□

Remarque 25 : La réciproque est fausse. Par exemple la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et pourtant sa moyenne de Cesàro converge vers 0.

IV Extension aux suites complexes

Définition IV.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{C}$ si et seulement si la suite réelle $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$ vers $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si la suite réelle $(|u_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 :
$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - l| \leqslant \varepsilon\,.$$

Remarque 26 :

1. Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est toujours dit convergente s'il existe un complexe $l \in \mathbb{C}$ vers lequel elle converge et divergente sinon.
2. On ne parle plus de suite divergeant vers $+\infty$ ou $-\infty$ car il y a une infinité de façon de s'éloigner à l'infini dans $\mathbb{C}$.

Proposition IV.2

- Toute suite complexe convergente est bornée.
- La limite d'une suite complexe est unique.
- Les opérations algébriques sur les limites de suites sont toujours vraies : la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient est la somme, le produit, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas) des limites (on ne parle que de suite convergentes ici).

Proposition IV.3

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les suites réelles $(\mathrm{Re}\,(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}\,(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $\mathbb{R}$. De plus
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\,(u_n) + i \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}\,(u_n)\,.$$
- **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ **alors** la suite réelle des modules $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$.

Démonstration.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $l \in \mathbb{C}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mathrm{Re}\,(u_n) - \mathrm{Re}(l)| = |\mathrm{Re}\,(u_n - l)|\,.$$

Or on rappelle que pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $|a|^2 \leqslant a^2 + b^2 = |z|^2$ et que donc $|a| \leqslant |z|$. Ainsi,

$$|\mathrm{Re}\,(u_n) - \mathrm{Re}(l)| \leqslant |u_n - l|\,.$$

Par définition $|u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par encadrement, $|\mathrm{Re}\,(u_n) - \mathrm{Re}(l)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Autrement dit $(\mathrm{Re}\,(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{Re}(l)$. De même on montre que $(\mathrm{Im}\,(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{Im}(l)$.

- Réciproquement si $(\mathrm{Re}\,(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(l)$ et si $(\mathrm{Im}\,(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(l)$, alors

$$|u_n - l| = |\mathrm{Re}\,(u_n) - \mathrm{Re}(l) + i\,(\mathrm{Im}\,(u_n) - \mathrm{Im}(l))| \underset{\text{(inégalité triangulaire)}}{\leqslant} \underbrace{|\mathrm{Re}\,(u_n) - \mathrm{Re}(l)|}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + |i|\,\underbrace{|\mathrm{Im}\,(u_n) - \mathrm{Im}(l)|}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\,.$$

Donc par encadrement $|u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

- Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$. Alors, par l'inégalité triangulaire,

$$||u_n| - |l|| \leqslant |u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc par encadrement, $||u_n| - |l|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, autrement dit $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$.

□

Exemple 27 : Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{(1+i)n+(1+i)}{2n+i}$.

Remarque 28 : Les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques se résolvent de la même façon que dans le cas réel.

Exemple 29 :

1. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = i$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\,u_n$.
2. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1 + i$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = iu_n + 2$.

Proposition IV.4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 **complexe**, (E_c) son équation caractéristique et Δ le discriminant associé.

- Si $\Delta \neq 0$, (E_c) admet deux racines complexes distinctes r_1 et $r_2 \in \mathbb{C}$. Alors il existe deux réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\, r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si $\Delta = 0$, (E_c) admet une unique racine double $r_0 \in \mathbb{C}$. Alors il existe deux réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)\, r_0^n.$$

Exemple 30 : Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = i$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = (-1 + i)u_{n+1} - (4 + 7i)u_n$.

Ernesto Cesàro *(Naples 1859 - près de Naples 1906) grandit dans la Nation Italienne nouvellement formée. Ce jeune Etat entendit développer l'éducation. Cesàro en profita lors de ses études à Naples. Son père fermier est l'un des premiers d'Italie à s'équiper de machines modernes. Lorsque Cesàro eu quatorze ans, son père l'envoya à Liège à l'Ecole des Mines où enseignait déjà son frère. Il y suivit les enseignements du mathématicien Catalan. Il suivit également des conférences à la Sorbonne, à Paris, données par Hermite ou Darboux. De retour en Italie, il enseigna d'abord en lycée à Rome avant d'obtenir à poste à l'Université de Palerme puis à celle de Naples. Il connut une fin tragique en tentant de sauver son jeune fils de la noyade.*

Ces travaux mathématiques furent multiples. Il chercha des liens entre l'arithmétique et l'analyse, notamment en étudiant les séries entières (cf programme de seconde année). Il donna une expression analytique de la courbe de Peano (une courbe définie sur $[0\,;1]$ *qui remplit tout le carré* $[0\,;1]\times[0\,;1]$ *!) mais ses travaux les plus remarqués furent en géométrie différentielle.*
La notion de convergence d'une suite au sens de Cesàro fut établie en parallèle en 1880 par Hölder et Frobenius.

C'est l'histoire d'un physicien et d'un mathématicien qui se lancent un défi en se posant alternativement des questions de plus en plus dur... Voyant qu'il commence à perdre la main sur les problèmes théoriques, le physicien demande :
« -On te donne une casserole, un pichet d'eau, un paquet de pâtes et une plaque de cuisson. Comment procèdes-tu pour cuire tes pâtes ? »
Le mathématicien réfléchit longuement mais sans succès. Il abandonne et avoue alors son ignorance. Le physicien tout fier de sa supériorité lui explique longuement le procédé expérimental. Vexé, le mathématicien lui répond :
« -Bon très bien je comprends. Mais avoue que ton problème était trop ardu : aucune question préliminaire pour établir quelques lemmes qui m'auraient permis de trouver par la suite la démonstration complète du théorème de cuisson des pâtes !
-Et qu'aurais-je pu poser comme première question ?
-Tu aurais pu me demander par exemple : à l'aide d'une casserole remplie d'eau bouillante et d'un paquet de pâtes, comment fais-tu pour cuire tes pâtes !
Voyant son ami un peu fâché, le physicien conciliant lui demande :
-D'accord, alors supposons que tu possèdes une casserole remplie d'eau bouillante et un paquet de pâtes, comment ferais-tu pour cuire tes pâtes ?
-Facile ! Répond le mathématicien enthousiaste. J'attends que l'eau refroidisse, je la vide dans un pichet et je me ramène ainsi au problème précédemment résolu ! »