

## Chapitre XIX : Espaces Vectoriels de dimension finie

Dans tout ce chapitre  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou le corps  $\mathbb{C}$ .

### I Dimension d'un espace vectoriel

#### I.1 Base extraite, base incomplète

**Définition I.1**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- On dit que  $E$  est un espace vectoriel **de dimension finie** si et seulement s'il existe une famille *finie* de vecteurs de  $E$  qui est génératrice dans  $E$ . Autrement dit  $E$  est de dimension finie s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$  tels que

$$E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n).$$

- Sinon, on dit que  $E$  est un espace vectoriel de dimension infinie.

**Exemple 1 :**

- Pour tout  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sont des espaces vectoriels de dimension finie.
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  sont des espaces vectoriels de dimension infinie.

**Remarque 2 :** Puisque qu'une base est une famille finie d'éléments et qu'elle est génératrice, tout espace vectoriel ayant une base est de dimension finie. Autrement dit tout espace vectoriel de dimension infinie n'admet pas de base.

**Théorème I.2 (Théorème de la base extraite)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie.

De toute famille génératrice  $\mathcal{G}$  finie on peut extraire une sous-famille  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{G}$  qui soit une base de  $E$ .

**Démonstration.** Soit  $\mathcal{G}$  une famille finie de vecteurs de  $E$ , génératrice de  $E$ . On note  $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et par hypothèse on a  $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ . On considère alors l'algorithme suivant : on note  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$ .

1. Si la famille  $\mathcal{G}_0$  est libre alors on pose  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0$  et on retourne  $\mathcal{B} = \mathcal{G}_0$ .
2. Si la famille  $\mathcal{G}_0$  est liée, alors l'un des vecteurs de  $\mathcal{G}_0$  est une combinaison linéaire des autres vecteurs :

$$\exists i \in \{1, \dots, n\}, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n), \quad u_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \lambda_j u_j.$$

On enlève alors ce vecteur de  $\mathcal{G}_0$  et on pose  $\mathcal{G}_1 = (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n)$ . La nouvelle famille  $\mathcal{G}_1$  est aussi génératrice (cf le point 6 de la proposition III.3 du chapitre XVII). On réitère alors l'algorithme à la famille  $\mathcal{G}_1$  et on construit ainsi  $\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \dots$  des familles de vecteurs.

On observe alors les points suivants :

- Pour tout  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ ,  $\mathcal{G}_{k+1}$  est une sous-famille de  $\mathcal{G}_k$ .
- Pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $\mathcal{G}_k$  est toujours une famille génératrice de  $E$ .
- L'algorithme retourne toujours une famille libre  $\mathcal{B}$  après un nombre fini d'étapes car à chaque itération contraire on enlève un vecteur de  $\mathcal{G}$  qui n'en contient que  $n$ . Donc au plus, l'itération est répétée  $n-1$ -fois et l'on obtient alors la famille ne contenant qu'un seul vecteur  $\mathcal{G}_{n-1} = (u)$  qui est bien sûr libre ! Dans ce cas, l'algorithme retourne  $\mathcal{B} = \mathcal{G}_n$ .
- Si l'algorithme se termine avant, à l'étape  $k \leq n-1$ , cela signifie que  $\mathcal{B} = \mathcal{G}_k$  est libre.

Dans tous les cas, la famille retournée  $\mathcal{B}$  est toujours génératrice mais aussi libre et est donc une base de  $E$ . □

**Théorème I.3 (Existence d'une base en dimension finie)**

Tout espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base.

**Démonstration.** C'est un corollaire du théorème de la base extraite. Si  $E$  est de dimension finie, il existe  $\mathcal{G}$  une famille finie de  $E$  génératrice de  $E$ . On peut alors en extraire une base de  $E$ .  $\square$

**Théorème I.4 (Théorème de la base incomplète)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie.

Soient  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)$ ,  $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n)$  une famille génératrice de  $E$  et  $\mathcal{L} = (u_1, \dots, u_p)$  une famille libre de  $E$ .

On peut compléter  $\mathcal{L}$  avec des vecteurs de  $\mathcal{G}$  pour obtenir une base de  $E$ .

**Démonstration.** On effectue l'algorithme suivant : on pose  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$  et  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$ .

1. Si la famille  $\mathcal{L}_0$  est génératrice alors on pose  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0$ ,  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0$  et on retourne  $\mathcal{B} = \mathcal{L}_0$ .
2. Si la famille  $\mathcal{L}_0$  n'est pas génératrice on lui ajoute  $g_1$ , et l'on considère  $\mathcal{L}'_0 = (u_1, \dots, u_p, g_1)$  et  $\mathcal{G}_1 = (g_2, \dots, g_n)$ .
  - 2.1 Si  $\mathcal{L}'_0$  est une famille libre alors on pose  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}'_0$  et on réitère l'algorithme sur les familles  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{G}_1$ .
  - 2.2 Si  $\mathcal{L}'_0$  est liée alors on pose  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0$  et on réitère l'algorithme sur les familles  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{G}_1$ .

On réitère alors l'algorithme et on construit ainsi de proche en proche  $\mathcal{L}_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{G}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{G}_3, \dots$

On observe alors les points suivants :

- Pour tout  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ ,  $\mathcal{L}_{k+1}$  est une sur-famille de  $\mathcal{L}_k$ .
- Pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $\mathcal{L}_k$  est toujours une famille libre de  $E$ .
- A chaque itération, on ôte un vecteur de  $\mathcal{G}$  qui n'en contient au départ que  $n$  donc on ne peut effectuer au plus que  $n$  itérations. L'important est de vérifier que la famille  $\mathcal{L}_k$  complétée sera génératrice avant que l'on ait puisé tous les vecteurs de  $\mathcal{G}$ . Après une itération la nouvelle famille  $\mathcal{L}_1$  vaut  $\mathcal{L}_1 = (u_1, \dots, u_p, g_1)$  (cas 2.1) ou  $\mathcal{L}_1 = (u_1, \dots, u_p)$  (cas 2.2). Démontrons que dans tous les cas, la famille  $\mathcal{L}_1$  engendre l'espace  $F_1 = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p, g_1)$ .
  - Dans le cas 2.1 puisque l'on a  $\mathcal{L}_1 = (u_1, \dots, u_p, g_1)$ , le résultat est immédiat.
  - Dans le cas 2.2, montrons que  $g_1 \in \text{Vect}(\mathcal{L}_1)$ . Puisque  $\mathcal{L}'_0 = (u_1, \dots, u_p, g_1)$  est liée dans ce cas, il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu) \in \mathbb{K}^{p+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  tel que

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p + \mu g_1 = 0$$

Supposons  $\mu = 0$ , alors  $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0$ . Comme  $\mathcal{L}_0$  est libre, on en déduit que tous les  $\lambda_i = 0$  ce qui contredit le fait que  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu) \neq (0, \dots, 0)$ . Par conséquent, on a  $\mu \neq 0$  et donc

$$g_1 = -\frac{\lambda_1}{\mu} u_1 - \dots - \frac{\lambda_p}{\mu} u_p.$$

i.e.  $g_1 \in \text{Vect}(\mathcal{L}_1)$  et donc  $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p, g_1) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(\mathcal{L}_1)$ .

Ainsi après  $k$  itérations si l'algorithme ne s'est pas encore terminé, la famille  $\mathcal{L}_k$  complétée engendrera  $F_k = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p, g_1, \dots, g_k)$ . Et notamment si  $k = n$  elle engendrera  $F_n = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p, g_1, \dots, g_n) = E$  car la famille  $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n)$  est génératrice. Par conséquent l'algorithme se termine au plus à la  $n$ -ième itération.

Ainsi l'algorithme retourne une famille  $\mathcal{B}$  génératrice. Or la famille  $\mathcal{B} = \mathcal{L}_k$  pour un certain  $k$  et les  $\mathcal{L}_k$  sont libres et des sur-familles de  $\mathcal{L}$ . Conclusion, la famille  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  et est une sur-famille de  $\mathcal{L}$ .  $\square$

**Proposition I.5**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Alors

- Toute famille de  $p$  vecteurs de  $E$  avec  $p > n$  est liée.
- Toute famille de  $p$  vecteurs de  $E$  avec  $p < n$  n'est pas génératrice de  $E$ .

**Démonstration.** Soit  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

- Si  $p > n$ . La famille  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  donc est notamment génératrice :  $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ . Donc pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $u_i \in E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$  et donc il existe  $(\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,n}) \in \mathbb{K}^n$  tel que

$$u_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} e_j$$

En d'autres termes,

$$(S) \quad \begin{cases} \lambda_{1,1} e_1 + \dots + \lambda_{1,n} e_n = u_1 \\ \vdots \\ \lambda_{p,1} e_1 + \dots + \lambda_{p,n} e_n = u_p \end{cases}$$

Posons  $A = (\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ . Puisque  $p > n$  nécessairement  $\text{rg}(A) \leq n < p$ . Donc la réduite en ligne de  $A$  est donnée par

$$R = (r_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} * & \dots & \dots & * \\ 0 & * & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où les  $*$  représentent des coefficients égaux à 0 ou à 1 sur la diagonale et quelconque sinon. Il faut surtout noter que pour  $i = p$  et tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on a  $r_{p,j} = 0$  (la dernière ligne au moins est nulle). Ainsi en effectuant les mêmes opérations élémentaires que sur la matrice  $A$  pour obtenir sa réduite  $R$  au système  $(S)$ , on aura dans le second membre des combinaisons linéaires des  $u_i$ , notées  $v_i$  qui vaudront pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $r_{i,1}e_1 + \dots + r_{i,n}e_n = v_i$ . Notamment  $v_p = 0$ . Nous avons donc une combinaison linéaire de  $u_i$  qui vaut 0. Or les coefficients de cette combinaison linéaire ne sont pas tous nuls (car ils sont obtenus par des opérations élémentaires sur les  $u_i$ ) et donc la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est liée.

- Si  $p < n$ . Supposons que  $(u_1, \dots, u_p)$  soit génératrice de  $E$ . Alors d'après le théorème de la base extraite, on peut en extraire une base de  $E$ . Notons  $\mathcal{B}'$  cette base et  $p'$  son nombre d'éléments. Cette base (étant extraite) contient au plus  $p$  éléments donc  $p' \leq p < n$ . Donc  $\mathcal{B}$  est une famille qui contient strictement plus d'éléments qu'une base de  $E$ , ici  $\mathcal{B}'$ . Donc par le point précédent, on en déduit que  $\mathcal{B}$  est une famille liée ce qui est contradictoire avec le fait que  $\mathcal{B}$  soit aussi une base. Donc  $(u_1, \dots, u_p)$  n'est pas une famille génératrice de  $E$ .  $\square$

### Corollaire I.6

Toutes les bases d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie possèdent le même nombre d'éléments.

## I.2 Dimension d'un espace et conséquence sur les familles

### Définition I.7

Soit  $E$  un espace vectoriel non nul de dimension finie, on appelle **dimension** de  $E$  le nombre d'éléments  $n \in \mathbb{N}^*$  que possède chacune des bases de  $E$ . On note alors  $\dim(E) = n$ .  
Par convention,  $\dim(\{0\}) = 0$ .

### Exemple 3 : A connaître !

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{K}^n$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .
- $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1 mais aussi un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n + 1$  (et non  $n$ !).
- Pour tout  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $np$ .

**Proposition I.8**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Toute famille libre de  $E$  possède au plus  $n$  éléments.
- Toute famille génératrice de  $E$  possède au moins  $n$  éléments.
- Toute base de  $E$  possède exactement  $n$  éléments.

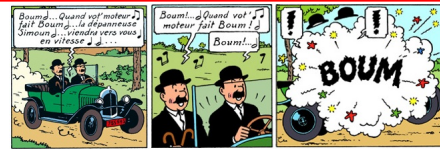
**Théorème I.9**

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$  une famille de vecteurs de  $E$ . Si deux des assertions suivantes sont vérifiées :

1. La famille  $\mathcal{F}$  est génératrice.
2. La famille  $\mathcal{F}$  est libre.
3. La famille  $\mathcal{F}$  possède  $p = n$  éléments.

Alors la famille  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$ .

**Remarque 4 :** A connaître sur le bout des doigts... Sinon boum !



**Remarque 5 :** Puisque toutes les bases ont le même nombre d'éléments qui vaut la dimension de  $E$ , si  $\mathcal{B}$  est une base les trois assertions énoncées sont vraies.

**Démonstration.**

- Les points 1 et 2 impliquent par définition que  $\mathcal{F}$  est une base.
- Supposons les points 1 et 3. Puisque  $\mathcal{F}$  est génératrice par le point 1, par le théorème de la base extraite, on peut en extraire  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .  $\mathcal{B}$  est une sous-famille de  $\mathcal{F}$  et est une base de  $E$ . Donc  $\mathcal{B}$  possède exactement  $n$  éléments :

$$\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E) = n = \text{Card}(\mathcal{F}) \quad \text{par le point 3.}$$

Donc  $\mathcal{B}$  est une sous-famille de  $\mathcal{F}$  et possède autant d'éléments que  $\mathcal{F}$ . Donc

$$\mathcal{B} = \mathcal{F}.$$

Par conséquent,  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$ .

- Supposons les points 2 et 3. On procède de la même façon. Par le point 2,  $\mathcal{F}$  est libre, on peut donc la compléter en  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . La famille  $\mathcal{B}$  est une sur-famille de  $\mathcal{F}$  et est une base de  $E$ . Puisque c'est une base, on a

$$\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E) = n = \text{Card}(\mathcal{F}).$$

Comme  $\mathcal{B}$  est une sur-famille de  $\mathcal{F}$  qui contient autant d'éléments que  $\mathcal{F}$ , on en déduit que  $\mathcal{B} = \mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}$  est bien une base de  $E$ . □

**Exemple 6 :**

1. On considère les polynômes  $P_0 = (X-1)(X-2)(X-3)$ ,  $P_1 = X(X-2)(X-3)$ ,  $P_2 = X(X-1)(X-3)$  et  $P_3 = X(X-1)(X-2)$ . Montrer que  $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
2. Dans  $\mathbb{R}^4$ , montrer que la famille  $((1, 2, 3, 4), (-1, 0, 1, 0))$  est libre et la compléter en une base.
3. Dans  $\mathbb{R}^3$ , montrer que la famille  $((1, 2, 3), (1, 0, 1), (2, 1, 3), (-1, 4, 0), (1, 1, 1))$  est génératrice et en extraire une base.

**Exemple 7 :**


1. On considère les polynômes  $P_0 = (X-1)(X-2)(X-3)$ ,  $P_1 = X(X-2)(X-3)$ ,  $P_2 = X(X-1)(X-3)$  et  $P_3 = X(X-1)(X-2)$ . Montrer que  $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
2. Dans  $\mathbb{R}^4$ , montrer que la famille  $((1, 2, 3, 4), (-1, 0, 1, 0))$  est libre et la compléter en une base.
3. Dans  $\mathbb{R}^3$ , montrer que la famille  $((1, 2, 3), (1, 0, 1), (2, 1, 3), (-1, 4, 0), (1, 1, 1))$  est génératrice et en extraire une base.

## II Sous-espaces vectoriels en dimension finie

### II.1 Dimension de sous-espaces vectoriels

#### Proposition II.1

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

1.  $F$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie.
2.  $\dim(F) \leq \dim(E)$ .
3. Si  $\dim(F) = \dim(E)$ , alors  $F = E$ .

#### Démonstration.

1. Si  $F = \{0_E\}$  alors  $\dim(F) = 0 \leq \dim(E)$ . Sinon, on pose

$$\aleph = \{ \text{Card}(\mathcal{L}) \mid \mathcal{L} \text{ est une famille libre de } F \},$$

où  $\text{Card}(\mathcal{L})$  désigne le cardinal de  $\mathcal{L}$  i.e. le nombre d'éléments de  $\mathcal{L}$ . L'ensemble  $\aleph$  est

- un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$ ,
- non vide : puisque  $F \neq \{0_E\}$ , il existe  $u \in F$  tel que  $u \neq 0_E$ . Donc  $\mathcal{L} = (u)$  est une famille libre de  $F$  et donc  $1 = \text{Card}(\mathcal{L}) \in \aleph$ .
- majoré : toute famille libre de  $F$  est une famille libre de  $E$  et donc possède au plus  $n = \dim(E)$ . Donc tout élément de  $\aleph$  est inférieur ou égal à  $n$ .

Par conséquent,  $\aleph$  admet un maximum notons-le  $m$  :

$$m = \max(\aleph) = \max \{ \text{Card}(\mathcal{L}) \mid \mathcal{L} \text{ est une famille libre de } F \}.$$

Par définition un maximum est toujours atteint, il existe donc  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$  une famille libre de  $F$  telle que  $m = \text{Card}(\mathcal{L})$ . Montrons que  $\mathcal{B}$  est une base de  $F$ . Soit  $x \in F$ . La famille  $\mathcal{B}' = \{x\} \cup \mathcal{B}$  possède  $m + 1$  éléments et n'est donc pas libre par définition de  $m$ . Il existe donc  $(\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$  tel que

$$\mu x + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m = 0.$$

Si  $\mu = 0$  alors  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m = 0$  et donc  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$  (car  $\mathcal{B}$  est une famille libre) ce qui contredit que  $(\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$ . Donc  $\mu \neq 0$  et par conséquent,

$$x = -\frac{\lambda_1}{\mu} e_1 - \dots - \frac{\lambda_m}{\mu} e_m \in \text{Vect}(\mathcal{B}).$$

On a donc montré que  $F \subseteq \text{Vect}(\mathcal{B})$  et puisque  $\mathcal{B}$  est une famille d'éléments de  $F$ , on a aussi  $\text{Vect}(\mathcal{B}) \subseteq F$ . On en déduit donc que  $F = \text{Vect}(\mathcal{B})$ . En d'autres termes, la famille  $\mathcal{B}$  est libre et génératrice dans  $F$  et est donc une base de  $F$  qui est donc bien de dimension finie (et même de dimension  $m$ ).

2. Soit  $\mathcal{B}_F$  une base de  $F$ . La famille  $\mathcal{B}_F$  est une famille libre de  $F$  et donc de  $E$ . D'après le théorème de la base incomplète,  $\mathcal{B}_F$  peut-être complétée en une base de  $E$ , notée  $\mathcal{B}_E$ . Puisque  $\mathcal{B}_E$  contient  $\mathcal{B}_F$ , on a

$$\dim(F) = \text{Card}(\mathcal{B}_F) \leq \text{Card}(\mathcal{B}_E) = \dim(E).$$

3. Si  $\dim(F) = \dim(E) = n$ . Soit  $\mathcal{B}_F$  une base de  $F$ . La famille  $\mathcal{B}_F$  possède  $n$  éléments et est une famille libre de  $F$  et donc de  $E$ . Donc d'après le théorème I.9, on en déduit que  $\mathcal{B}_F$  est aussi une base de  $E$ . Par conséquent,

$$F = \text{Vect}(\mathcal{B}_F) = E.$$

□

#### Proposition II.2

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Si  $F \subseteq G$  alors  $\dim(F) \leq \dim(G)$ .

**Proposition II.3**

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de  $E$ . Si deux des assertions suivantes sont vérifiées :

1.  $F \subseteq G$
2.  $G \subseteq F$
3.  $\dim(F) = \dim(G)$

Alors  $F = G$ .

**Remarque 8 :** Attention ces résultats sont faux en dimension infinie.  $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = 0\}$  est de dimension infinie tout comme  $E = \mathbb{K}[X]$  et pourtant  $F \neq E$ .

## II.2 Rang d'une famille de vecteurs

**Définition II.4**

Soient  $E$  un espace vectoriel,  $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$  une famille de vecteurs de  $E$ . On appelle **rang** de  $(u_1, \dots, u_p)$  la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs :

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)).$$

**Remarque 9 :**

- On a toujours  $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq \dim(E)$ . En effet, l'ensemble  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , donc par la proposition II.1, on en déduit bien que  $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq \dim(E)$ .
- On a toujours  $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq p$ . On pose  $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$  et on a alors  $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \dim(F)$ . La famille  $(u_1, \dots, u_p)$  étant génératrice de  $F$ , on sait qu'elle contient au moins  $\dim(F)$  vecteurs (cf proposition I.8) et donc  $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq p$ .

**Proposition II.5**

Soient  $E$  un espace vectoriel,  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$ . Le rang de  $\mathcal{F}$  reste identique si l'on applique une opération élémentaire i.e.

1. *Permutation :*

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = \text{rg}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p), \quad L_i \leftrightarrow L_j,$$

2. *Dilatation :* pour  $\lambda \neq 0$  (!),

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_p) = \text{rg}(u_1, \dots, \lambda u_i, \dots, u_p), \quad L_i \leftarrow \lambda L_i,$$

3. *Transvection :* pour  $i \neq j$ ,

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_i + \lambda u_j, \dots, u_p), \quad L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j.$$

**Exemple 10 :**

1. Calculer dans  $\mathbb{R}[X]$  le rang de  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  où

$$P_1 = -X^3 + 3X^2 + X + 2,$$

$$P_2 = 5X^3 + X^2 + 2X + 4,$$

$$P_3 = 2X^3 + 5X^2 + X + 3,$$

$$P_4 = 8X^3 + 3X^2 + 2X + 5.$$

2. Calculer dans  $\mathbb{R}^3$  le rang de  $((1, 1, 0), (0, 1, 1), (2, 1, -1))$ .

**Proposition II.6**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$ . Alors

1. La famille  $\mathcal{F}$  est génératrice dans  $E$  si et seulement si  $\text{rg}(\mathcal{F}) = n$ .
2. La famille  $\mathcal{F}$  est libre si et seulement si  $\text{rg}(\mathcal{F}) = p$ .
3. La famille  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\text{rg}(\mathcal{F}) = n = p$ .

**Démonstration.** On pose  $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ .

1. Si  $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(F) = n$ , alors d'après la proposition II.1, on en déduit que  $E = F = \text{Vect}(\mathcal{F})$  et donc  $\mathcal{F}$  est bien une famille génératrice. Réciproquement, si  $\mathcal{F}$  est génératrice dans  $E$  alors  $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) = \dim(E) = n$ .
2. Si  $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(F) = p$ , alors  $\mathcal{F}$  est une famille de  $F$ , génératrice dans  $F$ , possédant  $p = \dim(F)$  vecteurs. Donc d'après le théorème I.9,  $\mathcal{F}$  est une base de  $F$  et est donc libre. Réciproquement si  $\mathcal{F}$  est libre. Puisque par définition,  $\mathcal{F}$  est toujours génératrice dans  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  alors  $\mathcal{F}$  est une base de  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  et donc  $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) = \text{Card}(\mathcal{F}) = p$ .
3. Par ce qui précède,  $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(F) = p = n$  si et seulement si  $\mathcal{F}$  est libre et génératrice dans  $E$  si et seulement si  $\mathcal{F}$  forme une base de  $E$ . □

## II.3 Dimension de la somme

**Théorème II.7 (Formule de Grassmann)**

Soient  $E$  un espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de  $E$ . On a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

**Démonstration.** On pose  $p = \dim(F)$ ,  $q = \dim(G)$  et  $r = \dim(F \cap G)$ . On fixe  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r)$  une base de  $F \cap G$ . Puisque  $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ ,  $\mathcal{B}$  est une famille libre de  $F$  que l'on peut compléter en une base de  $F$ , notée  $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_p)$ . De même on peut compléter  $\mathcal{B}$  en une base  $\mathcal{B}_G = (e_1, \dots, e_r, g_{r+1}, \dots, g_q)$  de  $G$ . On pose  $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_p, g_{r+1}, \dots, g_q)$ . Montrons que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $F + G$ .

- Montrons que  $\mathcal{B}'$  est une famille génératrice de  $F + G$ . Soit  $x \in F + G$ . Il existe  $y \in F$  et  $z \in G$  tel que  $x = y + z$ . Puisque  $\mathcal{B}_F$  est une base de  $F$ , il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^n$  tel que

$$y = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1} f_{r+1} + \dots + \lambda_p f_p.$$

De même,  $\mathcal{B}_G$  est une base de  $G$  et donc il existe  $(\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^n$  tel que

$$z = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_r e_r + \mu_{r+1} g_{r+1} + \dots + \mu_q g_q.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} x &= (\lambda_1 + \mu_1) e_1 + \dots + (\lambda_r + \mu_r) e_r + \lambda_{r+1} f_{r+1} + \dots + \lambda_p f_p + \mu_{r+1} g_{r+1} + \dots + \mu_q g_q \\ \Rightarrow x &\in \text{Vect}(e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_p, g_{r+1}, \dots, g_q) = \text{Vect}(\mathcal{B}'). \end{aligned}$$

Donc  $F + G \subseteq \text{Vect}(\mathcal{B}')$ . Or il est clair que  $\mathcal{B}'$  est une famille de  $F + G$  donc  $\mathcal{B}'$  est une famille génératrice de  $F + G$ .

- Montrons que  $\mathcal{B}'$  est libre. Soient  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_{r+1}, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q-r}$  tel que

$$\begin{aligned} &\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1} f_{r+1} + \dots + \lambda_p f_p + \mu_{r+1} g_{r+1} + \dots + \mu_q g_q = 0 \\ \Leftrightarrow &\underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1} f_{r+1} + \dots + \lambda_p f_p}_{\in F} = - \underbrace{(\mu_{r+1} g_{r+1} + \dots + \mu_q g_q)}_{\in G} \quad (1) \end{aligned}$$

Par conséquent,  $u = -(\mu_{r+1} g_{r+1} + \dots + \mu_q g_q) \in F \cap G$ . Or  $\mathcal{B}$  est une base de  $F \cap G$  et donc il existe  $(\nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{K}^r$  tel que

$$\begin{aligned} u &= -(\mu_{r+1} g_{r+1} + \dots + \mu_q g_q) = \nu_1 e_1 + \dots + \nu_r e_r \\ \Leftrightarrow &\nu_1 e_1 + \dots + \nu_r e_r + \mu_{r+1} g_{r+1} + \dots + \mu_q g_q = 0. \end{aligned}$$

Or  $\mathcal{B}_G$  est une base de  $G$ , donc  $\nu_1 = \dots = \nu_r = \mu_{r+1} = \dots = \mu_q = 0$ . En particulier  $u = 0$  et donc par (1),

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1} f_{r+1} + \dots + \lambda_p f_p = 0.$$

Or  $\mathcal{B}_F$  est une base de  $F$ , donc  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ . On a donc bien montré que tous les coefficients initiaux étaient nuls et donc  $\mathcal{B}'$  est bien libre.

Donc  $\mathcal{B}'$  est une base de  $F + G$  et possède  $r + (p - r) + (q - r) = p + q - r$  éléments et donc  $\dim(F + G) = p + q - r = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ . □

### Proposition II.8

Soient  $E$  un espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux espaces de dimension finie de  $E$ .

Les espaces  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$ .

### Proposition II.9

Soient  $E$  un espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux espaces de dimension finie de  $E$ . Si deux des assertions suivantes sont vraies :

1.  $F \cap G = \{0\}$
2.  $F + G = E$
3.  $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

alors  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .



**Remarque 11 : Important.** Si  $F$  et  $G$  sont supplémentaires, alors en concaténant une base de  $F$  et de  $G$ , on obtient une base de  $E$  et réciproquement, si en concaténant une base de  $F$  et une base de  $G$  on obtient une base de  $E$  alors  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.

### Proposition II.10

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel de  $E$  admet un supplémentaire dans  $E$ .

**Démonstration.** Notons  $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Puisque  $E$  est de dimension finie, on sait que  $F$  est aussi de dimension finie, notons  $p = \dim(F)$  sa dimension.

- Si  $p = 0$ , alors  $F = \{0_E\}$  et donc  $E$  est un supplémentaire de  $F$ .
- Si  $p = n$ , alors  $F = E$  et donc  $\{0_E\}$  est un supplémentaire de  $E$ .
- Supposons maintenant  $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ . Puisque  $F$  est de dimension finie,  $F$  admet une base. Soit  $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$ . La famille  $\mathcal{B}_F$  est donc libre dans  $F$  et donc dans  $E$ .

D'après le théorème de la base incomplète, il existe  $e_{p+1}, \dots, e_n$  (car  $n \geq p + 1$ ) des vecteurs de  $E$  tels que  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$  soit une base de  $E$ . On pose  $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$  et on note que  $\mathcal{B}_G = (e_{p+1}, \dots, e_n)$  est libre en tant que sous-famille de  $\mathcal{B}$  qui est libre. De plus  $\mathcal{B}_G$  engendre  $G$ . Donc  $\mathcal{B}_G$  est une base de  $G$ . Ainsi,  $\mathcal{B}_F$  est une base de  $F$ ,  $\mathcal{B}_G$  est une base de  $G$  et  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$  est une base de  $E$ .

Conclusion, d'après le théorème de la base adaptée,  $G$  est un supplémentaire de  $F$ . □



**Hermann GRASSMANN** (Settin (actuelle Szczecin en Pologne) 1809 - Settin 1877) *Enfant il fut décrit rêveur avec un manque de mémoire et de concentration. Pourtant il fut envoyé à Berlin pour y étudier la théologie. Ils découvrent les sciences à travers quelques ouvrages de son père. Il enseigna quelques temps à Berlin dans un lycée avant de rentrer à Settin en 1835. Il publia en 1844 un ouvrage Die Ausdehnungslehre qui contient les prémices de l'algèbre linéaire : les combinaisons linéaires, les familles libres, liées, les bases et la dimension. Pourtant les théories de Grassmann furent trop précoces pour l'époque et très opaques. Ses travaux ne seront vraiment compris qu'en 1888, après sa mort, par Peano qui rédigea les axiomes des espaces vectoriels et définira la notion d'applications linéaires. L'incompréhension que subit Grassmann parmi ses pairs le poussa à se désintéresser de la recherche en mathématique. Un poste à l'université lui sera refusé sous le motif que ses travaux sont intéressants mais exprimés sous forme insuffisante. Il se tourna alors vers la linguistique indienne (védique en particulier). L'un de ses onze enfants, après un doctorat, deviendra professeur de mathématique à l'université de Geissen (Allemagne).*



Quelle est la définition physique d'un espace vectoriel ?

*C'est un ensemble d'éléments  $x$  tels qu'il y ait une flèche dessinée sur  $x$ .*