Chapitre II : Fonctions réelles

I Notations

I.1 Vocabulaire de base

Soient U et V deux parties de $\mathbb{R}$. Une fonction f de U dans V met en relation tout élément $x \in U$ avec un unique élément $y \in V$, noté $y = f(x)$. La fonction f est alors notée :

$$\begin{aligned} f : U &\to V \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Par définition d'une fonction, l'assertion suivante est toujours vraie :

$$\forall x \in U,\ \exists! y \in V, \quad y = f(x).$$

Vocabulaire Dans la relation $y = f(x)$,

- on dit que y est **l'image** de x,
- on dit que x est UN **antécédent** de y.

L'assertion précédente revient donc à dire que tout point de U admet une et une seule image.

Remarque 1 :

1. Il n'est absolument pas interdit dans la définition d'une fonction $f : U \to V$ qu'un point $y \in V$ n'admette pas d'antécédent ou au contraire admette plusieurs antécédents.
2. La définition rigoureuse d'une fonction réclame donc la donnée d'un espace de départ U, d'un espace d'arrivée V et de la donnée d'une unique image pour tout élément de U.

Exemple 2 : Parmi les fonctions suivantes lesquelles sont correctement définies ?

1. $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x). \end{aligned}$
2. $\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to [1;+\infty[\\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$
3. $\begin{aligned} h :]-1;1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln\left(1-x^2\right). \end{aligned}$
4. $\begin{aligned} i :]-1;1[&\to]-\infty;1[\\ x &\mapsto \ln\left(1-x^2\right). \end{aligned}$
5. $\begin{aligned} j : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si } x \leqslant 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$
6. $\begin{aligned} k : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } x \leqslant 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$

Notation
Soient U et V deux parties de $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{F}(U,V)$ l'ensemble des fonctions de U dans V.

Remarque 3 : Puisque tout élément de l'espace d'arrivée n'a pas nécessairement d'antécédent, il est toujours possible d'étendre une fonction réelle $f : U \to V$, avec U et V deux parties de $\mathbb{R}$ à une fonction $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ en donnant les mêmes images aux éléments $x \in U$. Face à cette constatation, et sans besoin contraire, on travaillera avec des fonctions f dont l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$ tout entier.

Remarque 4 : ATTENTION, il ne faut pas confondre f et $f(x)$ qui sont deux objets mathématiques très différents. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est un unique réel alors que f désigne la fonction toute entière. Veillez à toujours rigoureusement utiliser la bonne notation.

I.2 Ensemble de définition, ensemble image et image réciproque

Il arrive bien souvent lors de la formalisation d'un problème concret ou dans la résolution d'un exercice, que ce soit à nous de déterminer l'ensemble U le plus grand possible sur lequel il nous est possible de définir une fonction f. En toute rigueur, il serait faux de parler de fonction sans avoir donné un ensemble de départ approprié, mais l'on se permettra cette confusion. La définition qui suit rentre dans le cadre de cette confusion.

Définition I.1

Soit f une fonction de la variable réelle et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'ensemble de définition de f, noté $\mathscr{D}_f$ est l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ existe.

$$\mathscr{D}_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe } \}.$$

Exemple 5 : Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, $g : x \mapsto \frac{1}{x^2-4}$ et $h : x \mapsto \ln\left(x^2+x+4\right)$.

Définition I.2

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit A un sous-ensemble de U et B un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- **L'image de** A, notée $f(A)$ est l'ensemble des images des éléments de A :

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}.$$

- **L'image réciproque de** B, notée provisoirement $f^{\leftarrow}(B)$, est l'ensemble des antécédents des éléments de B :

$$f^{\leftarrow}(B) = \{ x \in U \mid f(x) \in B \}.$$

Remarque 6 :

1. La véritable notation de l'image réciproque est $f^{-1}(B)$ cependant cette notation implique des confusions avec la fonction réciproque f^{-1} (cf fin du chapitre). En particulier, l'image réciproque existe TOUJOURS tandis que la fonction réciproque n'existe QUE pour des bijections. Pour éviter cette confusion, nous garderons durant le semestre 1 cette notation $f^{\leftarrow}(B)$.
2. L'image réciproque peut être éventuellement l'ensemble vide.

Exemple 7 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

1. Déterminer l'image de $[5; +\infty[$ et $[-7; 3]$.
2. Déterminer l'image réciproque de $[-2; 2]$ et $[3; 8]$.

I.3 Opérations sur les fonctions

Définition I.3

Soient U une partie de $\mathbb{R}$, $(f, g) \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit alors les fonctions suivantes.

1. $f + g : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U$ par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
2. $\lambda f : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U$ par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
3. $f \times g : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U$ par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.
4. Si pour $x \in U$, $f(x) \neq 0$, on définit $\frac{1}{f} : U \to \mathbb{R}$ par $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$
5. $|f| : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U$ par $|f|(x) = |f(x)|$.

Remarque 8 :

1. La notation f^{-1} est réservée à la fonction réciproque (cf fin du chapitre) et ne peut pas être utilisée pour désigner la fonction inverse $\frac{1}{f}$.
2. Il est important que les deux fonctions f et g soient définies sur un ensemble U commun aux deux pour construire une nouvelle fonction à partir de f et g. Par exemple définir la fonction $f + g$ à partir de $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ et $g : [4; +\infty[\to \mathbb{R}$ n'a aucun sens.

Définition I.4

Soient U et V deux parties de $\mathbb{R}$, $g : U \to V$ et $f : V \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On définit **la composition** $f \circ g$ comme étant la fonction de U dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} f \circ g \quad : \quad & U \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f \circ g(x) = f(g(x)). \end{aligned}$$

Remarque 9 :

1. Attention à ne pas confondre $f \times g$ avec $f \circ g$. La composition notamment n'est pas commutative. En toute généralité appliquer g puis f est différent que d'appliquer f puis g : $f \circ g \neq g \circ f$.
2. La composition se lit de droite à gauche. Dans la composition $f \circ g$, on applique d'abord g à x, on obtient $g(x)$ puis on applique f à $g(x)$ pour obtenir $f(g(x))$.
3. Les hypothèses sur les ensembles de départ et d'arrivée ne sont pas anodines. Il est possible que g soit définie de prime abord comme une fonction de $U \to \mathbb{R}$. Mais si f est définie sur un ensemble $V \subsetneq \mathbb{R}$, il est nécessaire de vérifier que $g(U) \subseteq V$, c'est-à-dire que pour tout $x \in U$, $g(x) \in V$, pour pouvoir appliquer $f : V \to \mathbb{R}$ à g et définir la composition $f \circ g$.

Exemple 10 : Soient $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+1 \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{array}$. Montrer que les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ existent et les déterminer.

Exemple 11 : Soient $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$. Démontrer que la fonction $f \circ g$ existe et la déterminer. Pourquoi ne pouvons-nous pas définir la fonction $g \circ f$? Comment faut-il restreindre f pour pouvoir définir $g \circ f$?

II Graphe d'une fonction

On note $\mathscr{P}$ le plan euclidien munit d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

II.1 Définition

Définition II.1

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$. **Le graphe** de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\Gamma_f = \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in U \right\}.$$

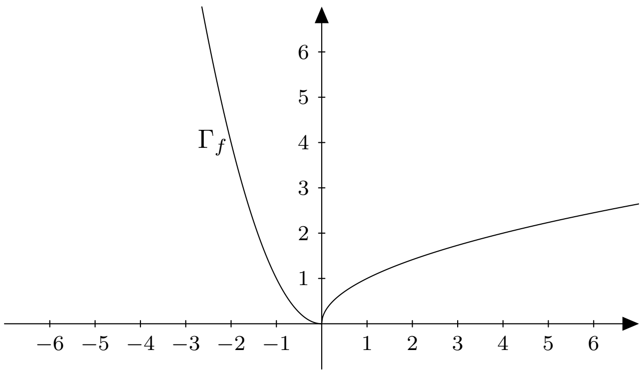
On appelle encore graphe de f ou **courbe représentative** de f l'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ de coordonnées $(x, f(x))$ pour $x \in U$.

Exemple 12 :

On pose

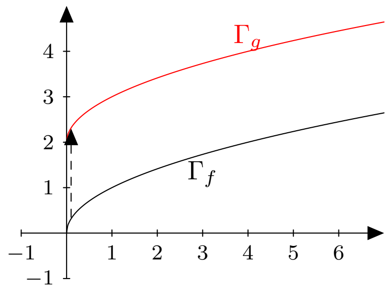
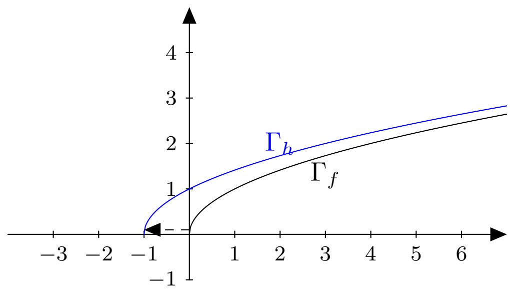
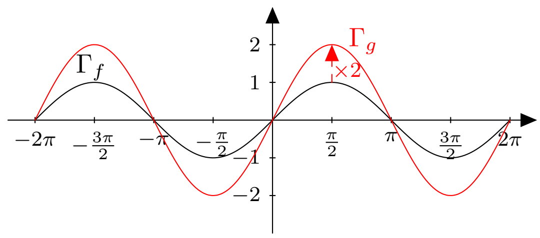
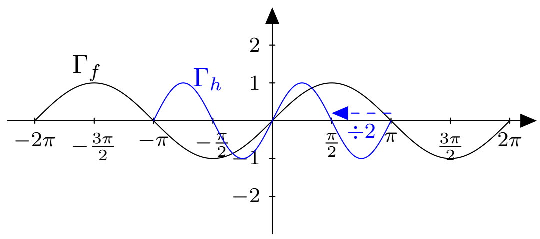
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Le graphe de f est alors donné par la figure ci-contre.



II.2 Transformations remarquables du graphe

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. A partir de f, on construit des fonctions g et h suivantes dont les graphes s'obtiennent alors par des transformations remarquables du plan. Dans chaque cas, on adaptera les ensembles de définition de g et h en fonction de U pour que les formules aient un sens.

La nouvelle fonction	La graphe de la nouvelle fonction s'obtient à partir de Γ_f par...	Illustration
$g : x \mapsto f(x) + a$	...la translation de vecteur $a\overrightarrow{j}$	
$h : x \mapsto f(x+a)$	...la translation de vecteur $-a\overrightarrow{i}$	
$g : x \mapsto af(x)$	...la dilatation verticale de coefficient a : $$\begin{array}{c}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x, ay)\,.\end{array}$$	
$h : x \mapsto f(ax)$	...la dilatation horizontale de coefficient $\frac{1}{a}$: $$\begin{array}{c}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \left(\frac{x}{a}, y\right).\end{array}$$	

Remarque 13 : Il est bon de savoir retrouver ces propriétés à l'aide d'un dessin. Notamment ne vous laissez pas attraper par le signe $-$ dans la translation horizontale ou le coefficient $\frac{1}{a}$ dans la dilatation horizontale.

Les dessins des translations sont donnés par :

Exemple 14 : On pose $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On considère alors La fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $g(x) = \sqrt{x} + 2$ et la fonction $h : [-1; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [-1; +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x+1}$. Alors Γ_g s'obtient de Γ_f par une translation de vecteur $2\overrightarrow{j}$ et Γ_h s'obtient de Γ_h par translation de vecteur $-\overrightarrow{i}$.

Les dessins des dilatations sont donnés par :

Exemple 15 : On prend $U = [-\pi; \pi]$ et $f : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U$ par $f(x) = \sin(x)$. Alors la fonction $g : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in U$ par $g(x) = 2\sin(x)$ est obtenue à partir de f par une dilatation verticale de coefficient 2 et la fonction $h : V = \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in V$ par $h(x) = \sin(2x)$ est obtenue à partir de f par une dilatation horizontale de coefficient $\frac{1}{2}$ (ou contraction ici de coefficient 2).

A vous de jouer :

Exemple 16 : On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Par des transformations du graphe de f déterminer celui de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = (2-x)^2$ et celui de $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = 2 - x^2$.

II.3 Relation d'ordre

Définition II.2

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$ et f et g deux éléments de $\mathscr{F}(U, \mathbb{R})$. On dit que f est **supérieure** à g sur U, noté $f \geqslant g$, si

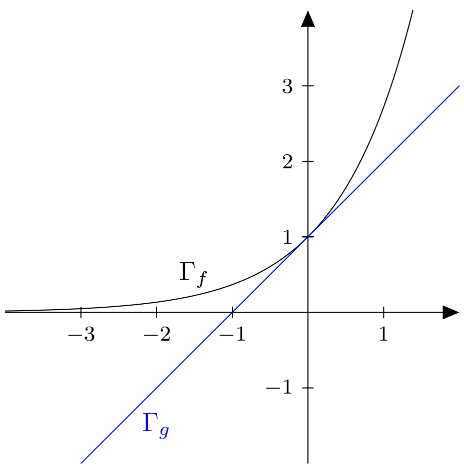
$$\forall x \in U, \quad f(x) \geqslant g(x).$$

Remarque 17 :

1. On a des définitions analogues pour strictement supérieure, inférieure et strictement inférieure.
2. Ne confondez pas $f \geqslant g$ qui vaut lorsque f est supérieure à g sur TOUT son ensemble de définition avec $f(x) \geqslant g(x)$ pour un x fixé, qui correspond à UN point de f qui est supérieur à un point de g.
3. Graphiquement si $f \geqslant g$ sur U, alors Γ_f est « au-dessus » de Γ_g.
4. La relation d'ordre $\leqslant$ n'est pas totale sur $\mathscr{F}(U, \mathbb{R})$. Donner un exemple de couple de fonctions $(f, g) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ tel qu'on n'ait ni $f \leqslant g$ ni $g \leqslant f$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 18 :

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = x + 1$, on a $f \leqslant g$ sur $\mathbb{R}$.



III Propriétés

III.1 Parité

Définition III.1

Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ centré en 0, c'est-à-dire tel que $\forall x \in U, -x \in U$. Soit $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$.

- On dit que f est **une fonction paire** si et seulement si pour tout $x \in U$,

$$f(-x) = f(x).$$

- On dit que f est **une fonction impaire** si et seulement si pour tout $x \in U$,

$$f(-x) = -f(x).$$

Proposition III.2

Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ centré en 0, c'est-à-dire telle que $\forall x \in U$, $-x \in U$. Soit $f \in \mathscr{F}(U\mathbb{R})$.

- La fonction f est paire si et seulement si son graphe Γ_f est symétrique par rapport à la droite $x = 0$.
- La fonction f est impaire si et seulement si son graphe Γ_f est symétrique par rapport au point $(0; 0)$.

Remarque 19 : Dans le cas d'une fonction paire ou impaire, on économise souvent beaucoup d'énergie à l'étudier sur $\mathbb{R}_+$ uniquement (ou $\mathbb{R}_-$) et à étendre alors directement le comportement de la fonction sur l'autre demi-droite grâce à la symétrie. A l'oral en particulier, c'est à vous de prendre l'initiative et d'expliquer que vous n'étudiez la fonction que sur $\mathbb{R}_+$ (ou $\mathbb{R}_-$).

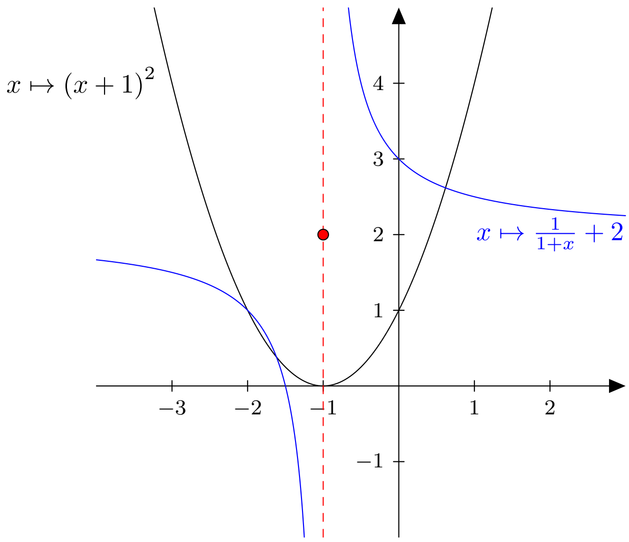
Remarque 20 : On peut également énoncer une propriété plus générale : soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $U \subseteq \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ centrée en a, c'est-à-dire telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in U \iff x + a \in U$. Dans ce cas,

- Le graphe de f, Γ_f admet la droite $x = a$ pour axe symétrie si et seulement si
$$\forall x \in U, \quad f(a + x) = f(a - x).$$
- Le graphe de f, Γ_f admet le point (a, b) pour centre de symétrie si et seulement si
$$\forall x \in U, \quad \frac{f(x + a) + f(a - x)}{2} = b.$$

Notamment en prenant $a = b = 0$, on retrouve la propriété précédente.

Exemple 21 :

1. Les fonctions constantes, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont des fonctions paires sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \tan(x)$ sont des fonctions impaires sur leurs ensembles de définition.
3. La fonction $x \mapsto (x + 1)^2$ est symétrique sur $\mathbb{R}$ par rapport à la droite $x = -1$.
4. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x} + 2$ est symétrique sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par rapport au point $(-1, 2)$.



Exercice 22 : Etudier l'ensemble de définition et la parité de la fonction $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

III.2 Fonctions périodiques

Définition III.3

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est **périodique de période** T ou encore T-périodique si et seulement si

- pour tout $x \in U$, $x + T \in U$,
- pour tout $x \in U$, $f(x) = f(x + T)$.

Définition III.4

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$. On dit que f est **périodique**, s'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit T-périodique.

Exemple 23 : Les fonctions constantes sont T-périodiques pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques, la fonction tangente est π-périodique.

Remarque 24 : Si f est T-périodique alors f est kT-périodique pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Proposition III.5

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$. La fonction f est T-périodique si et seulement si son graphe Γ_f est invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$.

Démonstration. Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$.
Supposons que f soit T-périodique, alors pour $x \in U$, on sait que $x + T \in U$ et que $f(x+T) = f(x)$. Soit $M(x, f(x)) \in \Gamma_f$ et N son image par la translation de vecteur $T\vec{i}$, $N = M + T\vec{i}$. Le point N a pour coordonnées $(x, f(x)) + (T, 0) = (x + T, f(x)) = (x + T, f(x + T))$ Comme $x + T \in U$, on en déduit que $N \in \Gamma_f$, ce qui démontre que Γ_f est stable par la translation de vecteur $T\vec{i}$.
Réciproquement supposons que Γ_f soit stable par la translation de vecteur $T\vec{i}$. Soit $x \in U$, alors le point $M(x, f(x)) \in \Gamma_f$, a son image $N = M + T\vec{i}$ appartenant à Γ_f. Or N a pour coordonnées $(x + T, f(x)) \in \Gamma_f$. Donc par définition de Γ_f on en déduit qu'il existe $\tilde{x} \in U$ tel que $(x + T, f(x)) = (\tilde{x}, f(\tilde{x})) \Leftrightarrow \tilde{x} = x + T$ et $f(\tilde{x}) = f(x)$. Donc on en déduit d'une part que $x + T = \tilde{x} \in U$ et d'autre part que $f(x) = f(\tilde{x}) = f(x + T)$, ce qui démontre bien que f est T-périodique.
□

Remarque 25 : Pour construire le graphe d'une fonction f T-périodique, il suffit de connaitre son graphe sur un intervalle $[a; a + T]$ et de répéter ce motif sur les intervalles $[ka; (k + 1)a]$, $k \in \mathbb{Z}$. Comme pour les fonctions paires et impaires, il est important de réduire l'étude de la fonction à un intervalle de longueur T seulement (le plus simple possible tant qu'à faire) puis de savoir étendre cette étude par périodicité.

Exercice 26 : Etudier si la fonction $x \mapsto x^2 \cos(x)$ est périodique ou non.

III.3 Monotonie

Définition III.6

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$ et I un intervalle inclus dans U.

- On dit que f est **croissante** (respectivement **strictement croissante**) sur I si et seulement si pour tout $(x, y) \in I^2$,
$$x \leqslant y \qquad (\text{respectivement } x < y) \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \leqslant f(y) \qquad (\text{respectivement } f(x) < f(y)).$$
- On dit que f est **décroissante** (respectivement **strictement décroissante**) sur I si et seulement si pour tout $(x, y) \in I^2$,
$$x \leqslant y \qquad (\text{respectivement } x < y) \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \geqslant f(y) \qquad (\text{respectivement } f(x) > f(y)).$$
- On dit que f est **monotone** (respectivement **strictement monotone**) sur I si f est croissante (respectivement strictement croissante) sur I tout entier ou si f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I tout entier.

Remarque 27 : Soient $U \subseteq\in \mathbb{R}$, I un intervalle de U, $(f, g) \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$.

1. Si f est (strictement) monotone sur I et $\lambda > 0$ alors λf a la même (stricte) monotonie que f sur I.
2. Si f est (strictement) monotone sur I et $\lambda < 0$ alors λf est (strictement) monotone sur I mais de monotonie opposée.
3. Si f et g sont monotones de même monotonie sur I alors $f + g$ est monotone de même monotonie sur I.
4. Si f est monotone sur I, et g strictement monotone sur I de même monotonie que f, alors $f + g$ est strictement monotone de même monotonie sur I.
5. Si f et g sont monotones de même monotonie sur I alors $f \circ g$ est croissante sur I.
6. Si f et g sont monotones de monotonies opposés sur I alors $f \circ g$ est décroissante sur I.

Remarque 28 : Il ne faut pas apprendre mais il faut savoir retrouver et redémontrer chacune des assertions ci-dessus. Il faut également être conscient de ce que cette proposition n'affirme pas. Par exemple si f est croissante sur I et g décroissante sur I alors on ne peut rien dire a priori de $f + g$.

Exemple 29 : La fonction cosinus est strictement croissante sur les intervalles $[(2k-1)\pi; 2k\pi]$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et strictement décroissante sur les intervalles $[2k\pi; (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 30 : Déterminer des conditions suffisantes sur f et g pour que fg soit croissante.

III.4 Majoration, minoration

Définition III.7

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$.

- Soit $M \in \mathbb{R}$, on dit que M **majore** f sur U ou est **un majorant** de f sur U ou encore que f est **majorée par** M sur U si
$$\forall x \in U, \qquad f(x) \leqslant M.$$
- Soit $m \in \mathbb{R}$, on dit que m **minore** f sur U ou est **un minorant** de f sur U ou encore que f est **minorée par** m sur U si
$$\forall x \in U, \qquad f(x) \geqslant m.$$
- On dit que f est **majorée** sur U, s'il existe $M \in \mathbb{R}$ qui majore f et on dit que f est **minorée** sur U, s'il existe $m \in \mathbb{R}$ qui minore f.
- On dit que f est **bornée** sur U si f est majorée et minorée sur U.

Remarque 31 :

1. La fonction f est majorée, respectivement minorée, sur U si et seulement si l'ensemble $\{ f(x) \mid x \in U \}$ est une partie majorée, respectivement minorée.
2. Si f est majorée, respectivement minorée, alors $-f$ est minorée, respectivement majorée.

Proposition III.8

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$. La fonction f est bornée sur U et et seulement si
$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in U, \qquad |f(x)| \leqslant M.$$

Démonstration. La preuve est semblable à la proposition analogue d'une partie bornée (cf chapitre précédent). Supposons f bornée. Par définition, f est majorée et minorée, donc il existe $(M, m) \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in U, \qquad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$
On pose $\eta = \max(M, -m)$. Soit $x \in U$. Premier cas $f(x) \geqslant 0$, alors $0 \leqslant f(x) \leqslant M$ et donc $|f(x)| = f(x) \leqslant M \leqslant \eta$. Si $f(x) \leqslant 0$ alors $m \leqslant f(x) \leqslant 0$ et donc $|f(x)| = -f(x) \leqslant -m \leqslant \eta$. Dans tous les cas, $|f(x)| \leqslant \eta$ ce qui implique au passage que $\eta \in \mathbb{R}_+$ d'où le résultat.
Réciproquement, s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in U$, $|f(x)| \leqslant M$, alors pour tout $x \in U$, $-M \leqslant f(x) \leqslant M$ et donc f est majorée par M et minorée par $-M$ et donc bornée sur U. $\square$

Graphiquement, la fonction f est majorée si son graphe se situe « en dessous » d'une droite horizontale. Plus précisément, f est majorée par M si Γ_f se trouve en dessous de la droite d'équation $y = M$.
De la même façon, f est minorée par m si Γ_f se situe au dessus de la droite $y = m$.

Dessin :

Exemple 32 :

1. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est minorée par 0 sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas majorée.
2. La fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ est majorée par 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est pas minorée.
3. La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

IV Continuité, dérivation

La continuité et la dérivation sont des notions que nous reverrons plus en détails dans un chapitre ultérieur après avoir défini rigoureusement la notion de limite. Les définitions données ici s'appuient donc sur la notion intuitive de limite.

IV.1 Continuité : rappels de terminal

Définition IV.1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. La fonction f est **continue en** a si
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$
2. La fonction f est **continue sur** I si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction f est continue en a.

Graphiquement, une fonction continue possède un graphe sans « saut », que l'on peut dessiner « sans lever le crayon ».

Exemple 33 : Sont continues, les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$, les fonctions cosinus et sinus, la fonction tangente sur chacun des intervalles $\left]\frac{(2k-1)\pi}{2}; \frac{(2k+1)\pi}{2}\right[$, la fonction inverse sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, la fonction exponentielle, la fonction logarithme et la fonction racine carrée sur leurs ensembles de définition.

Proposition IV.2

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, f et g deux fonctions $I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. Si f et g sont continues en a alors $f+g$, $f-g$ et $f \times g$ sont continues en a.
   Si de plus $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.
2. Si f et g sont continues sur I alors $f+g$, $f-g$ et $f \times g$ sont continues en a.
   Si de plus $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

Proposition IV.3

Soient I et J deux intervalles d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, $a \in I$. Soient $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $g(a) \in J$ et $f : J \to \mathbb{R}$.

1. Si g est continue en a et si f est continue en $g(a)$ alors $f \circ g$ est continue en a.
2. Si g est continue sur I, si f est continue sur J et si $g(I) \subseteq J$, alors $f \circ g$ est continue sur I.

Remarque 34 : Pour assurer la continuité d'une fonction, il suffit de faire remarquer que la fonction est la somme et/ou le produit et/ou la composition de fonctions élémentaires continues sur leurs ensembles de définition. Par exemple la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{3x^2}{x+5}}$ est continue sur son ensemble de définition. Les fonctions $x \mapsto 3x^2$ et $x \mapsto x+5$ sont continues sur $\mathbb{R}$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $x+5=0 \iff x=-5$. Donc la fonction $x \mapsto \frac{3x^2}{x+5}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$ comme fraction de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-5\}$, $\frac{3x^2}{x+5} \geqslant 0 \Leftrightarrow x > -5$, donc la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{3x^2}{x+5}}$ est continue sur $]-5; +\infty[$ comme composée de fonctions continues.

Théorème IV.4 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si f est **continue** sur le segment $[a;b]$ alors

$$\forall \lambda \in [f(a); f(b)] \text{ (ou } [f(b); f(a)]), \qquad \exists c \in [a;b], \ \lambda = f(c).$$

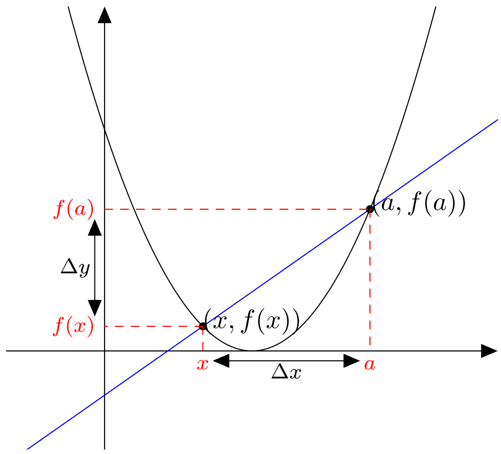
IV.2 Dérivation : rappels de terminal

Définition IV.5

Soient I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. **Le taux d'accroissement** de f en a, noté τ_a est la fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \qquad \tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Interprétation graphique. Le nombre $\tau_a(x)$ est la pente de la droite reliant les points $(x, f(x))$ et $(a, f(a))$.



Définition IV.6

Soient I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

1. La fonction f est **dérivable en** a si et seulement si son taux d'accroissement τ_a admet une limite finie en a :
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \tau_a(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$
On note alors cette limite $f'(a)$.
2. La fonction f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point $a \in I$.
3. Lorsque la fonction f est dérivable sur I, on définit la **fonction dérivée** de f, notée f' sur I par la fonction qui à tout $x \in I$ associe son nombre dérivée $f'(x)$.

Remarque 35 :

1. En changeant la variable $x = a + h$, on obtient également formule suivante :
$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$
2. La dérivée est parfois notée, en particulier en physique, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$.

Exemple 36 :

1. Démontrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur leurs ensembles de définition.
   1. $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$.
   2. $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. Démontrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ mais n'est pas dérivable en 0.
3. Démontrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas dérivable en 0.

Démonstration.

1. 1 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Premier cas, si $n = 0$, alors $x \mapsto x^n$ est la fonction constante égale à 1 qui est bien sûr dérivable $\mathbb{R}$ et dont la dérivée est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
Supposons maintenant $n \neq 0$. Alors par la formule de Bernoulli,

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{(x+h-x)\sum_{k=0}^{n-1}(x+h)^{n-1-k}h^k}{h} &= \sum_{k=0}^{n-1}(x+h)^{n-1-k}h^k \\ &= (x+h)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1}(x+h)^{n-1-k}h^k.\end{aligned}$$

Or pour tout $k \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, $k \geqslant 1$ donc $\lim_{h\to 0} h^k = 0$. Ainsi,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \sum_{k=1}^{n-1}(x+h)^{n-1-k}h^k = \sum_{k=1}^{n-1} x^{n-1-k} \times 0 = 0.$$

D'où

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = x^{n-1}.$$

Conclusion, $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

2 Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $h \in \mathbb{R}^* \setminus \{-x\}$. On a

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{x-(x+h)}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{car } x \neq 0.$$

Donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

2. Soient $x \in [0\,;\,\infty[$ et $h\,]-x\,;\,+\infty[\,\setminus\{0\}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \qquad \text{car } \sqrt{x+h}+\sqrt{x} > 0\\ &= \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Premier cas, si $x > 0$, alors

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{car } \lim_{h\to 0}\sqrt{x+h} = \sqrt{x} \text{ car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+$$

Par conséquent la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Second cas, si $x = 0$, alors $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$. Donc

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = +\infty.$$

Donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 mais admet une tangente verticale en ce point.

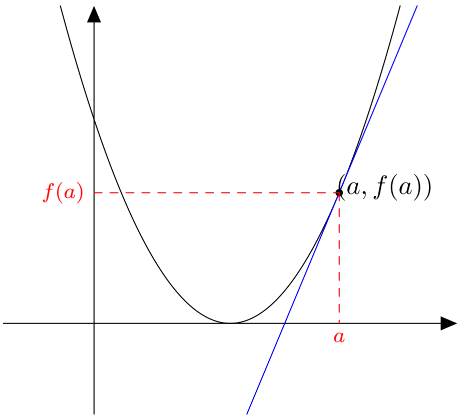
3. Pour tout $x > 0$, $|x| = x$. Donc la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, on a $(|x|)' = 1$. De même pour tout $x < 0$, $|x| = -x$. Donc la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et pour tout $x < 0$, on a $(|x|)' = -1$. Cependant, pour $x = 0$, on a

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{|0+h| - |0|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{|0+h| - |0|}{h}.$$

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 mais admet deux « demi-tangente » distinctes en 0.

□

Graphiquement, lorsque l'on fait tendre $x \to a$, le point $(x, f(x))$ se rapproche de plus en plus du point $(a, f(a))$. La droite passant par les points $(x, f(x))$ et $(a, f(a))$ est une droite dont la pente est à la limite $f'(a)$ et qui vient s'ajuster au mieux à la courbe Γ_f au point $(a, f(a))$. Cette droite est la tangente à Γ_f.



Définition IV.7

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. On appelle **tangente** de f en a la droite d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Remarque 37 :

1. Nous verrons dans un chapitre ultérieur que la tangente est la meilleure approximation affine de la fonction f au voisinage du point a.
2. La tangente est horizontale si et seulement si $f'(a) = 0$.
3. Lorsque τ_a diverge vers l'infini, on dit toujours que la courbe admet une tangente mais qui est verticale.
4. Si τ_a admet des limites distinctes à gauche et à droite : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \tau_a(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \tau_a(x)$, on dit que a est un point anguleux.
5. Si $f(t)$ correspond à la position d'un mobile en mouvement rectiligne au temps t alors $\tau_a(t)$ correspond à la vitesse moyenne du mobile entre les instants a et t. La dérivée $f'(a)$ correspond à la vitesse instantanée du mobile.

Proposition IV.8

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $a \in I$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en a, λ et μ deux réels.

- La fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$

- La fonction fg est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Proposition IV.9

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $a \in I$. Soient $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a telle que $g(a) \in J$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $g(a)$. Alors la fonction $f \circ g$ est dérivable en a et

$$(f \circ g)'(a) = g'(a) f'(g(a)).$$

Remarque 38 : On peut étendre ces propositions à des fonctions dérivables sur des intervalles.

- Si f et g sont dérivables sur I alors $\lambda f + \mu g$ et fg sont dérivables sur I.
- Si $g : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, si $f : J \to \mathbb{R}$ est dérivable sur J et si $g(I) \subseteq J$ alors, $f \circ g$ est dérivable sur I.

Remarque 39 : Pour démontrer qu'une fonction est dérivable et calculer sa dérivée, il faut bien souvent utiliser les propositions précédentes en reconnaissant que la fonction considérée est construite à partir de fonctions élémentaires bien connue.
Par exemple la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{3x^2}{x+5}}$ est dérivable sur $]-5;0[\cup]0;+\infty[$.
En effet, la fonction $x \mapsto x+5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en $x=5$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Donc, par composée de fonctions, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+5}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$.
La fonction $x \mapsto 3x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par produit de fonctions, la fonction $x \mapsto \frac{3x^2}{x+5}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$, $\frac{3x^2}{x+5} > 0 \Leftrightarrow 3x^2 > 0$ et $x+5>0 \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x > -5$. La fonction $x \mapsto \frac{3x^2}{x+5}$ est donc dérivable et strictement positive sur $]-5;0[\cup]0;+\infty[$. Donc par composée de fonctions, $x \mapsto \sqrt{\frac{3x^2}{x+5}}$ est dérivable sur $]-5;0[\cup]0;+\infty[$.
Formulaire.
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Paramètre	fonction	dérivée
	u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
$n \in \mathbb{N}$, $\alpha = -n$	$\frac{1}{u^n}$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$
$\alpha = 1/2$ et $u > 0$ sur I	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
	e^u	$u'\,\mathrm{e}^u$
$u > 0$ sur I	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$	$\lambda\, u + \mu v$	$\lambda\, u' + \mu v'$
	uv	$u'v + uv'$
v ne s'annulant pas sur I	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
u dérivable sur I et v sur $J \supseteq v(I)$	$v \circ u$	$u' \times (v' \circ u)$

IV.3 Dérivées d'ordres supérieurs

Avec la dérivation, on définit une nouvelle fonction f' qui peut alors elle-même être dérivable, dont la dérivée peut être dérivable, dont la dérivée de la dérivée peut être dérivable...

Définition IV.10

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On définit récursivement

- Si $n = 0$, $f^{(0)} = f$ est la fonction f elle-même.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si la fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur I alors on pose $f^{(n+1)} = f^{(n)\prime}$, la dérivée de la fonction $f^{(n)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, lorsque la fonction $f^{(n)}$ existe sur I alors on dit que la fonction f est n **fois dérivable** sur I et $f^{(n)}$ est **la dérivée** n**-ième** de f.

Exemple 40 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $f : x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$ est toujours f.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n-ième de $g : x \mapsto \cos(x)$.
3. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f_p : x \mapsto x^p$.

Proposition IV.11

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables sur I et λ et μ deux réels. Alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable sur I et

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

Démonstration. Récurrence ! □

V Applications de la dérivation

V.1 Dérivation et variation

Proposition V.1

Soient I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- La fonction f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
- La fonction f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.

Démonstration. ($\Rightarrow$). Soit f une fonction croissante sur I et $a \in I$. Soit $x \in I$. Si $x < a$ alors par croissance de f, $f(x) \leqslant f(a)$ et donc $\tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$. Si $x > a$, alors par croissance de f, $f(x) \geqslant f(a)$ et donc $\tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$. Dans tous les cas $\tau_a(x) \geqslant 0$ et donc par passage à la limite, $f'(a) \geqslant 0$.
($\Leftarrow$). Admis pour l'instant. □

Corollaire V.2

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Démonstration. La fonction f est constante sur I si et seulement f est à la fois croissante et décroissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est positive et négative sur I si et seulement si sa dérivée f' est nulle. □

Corollaire V.3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Les fonctions f' et g' sont égales sur I si et seulement s'il existe $C \in I$ tel que $f(x) = g(x) + C$.

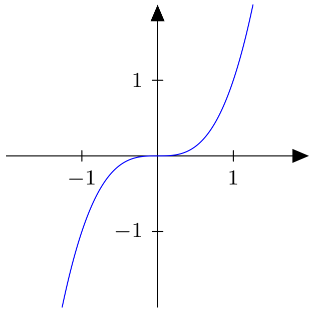
Démonstration. Supposons que f' et g' soient égales sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) - g'(x) = 0$. Donc d'après le corollaire précédent, la fonction $f - g$ est constante sur I donc il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) - g(x) = C$.
La réciproque est immédiate en dérivant l'égalité $f = g + C$ sur I. □

Proposition V.4 (admise)

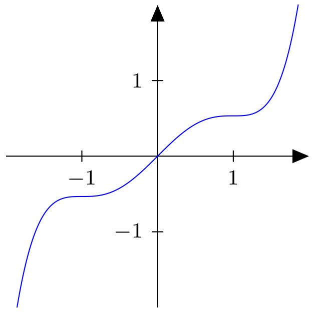
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Si la fonction f' est positive, respectivement négative, sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement croissante, respectivement strictement décroissante, sur I.

Exemple 41 :

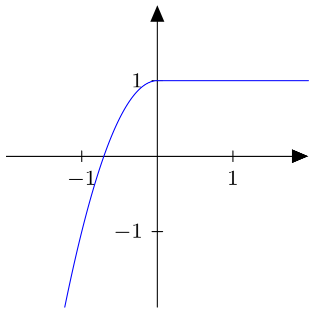
1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$. La fonction f' est donc positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en un seul point $x = 0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



2. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \left(x^2 - 1\right)^2$. La fonction f' est donc positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en deux points $x = 1$ et $x = -1$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



3. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\,|x| - x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (le vérifier, quel est le point pouvant poser problème ?) et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -4x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. La fonction f' est donc positive sur $\mathbb{R}$ mais s'annule sur $[0; +\infty[$. La fonction f est bien strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ mais pas sur $\mathbb{R}$ car elle est constante sur $[0; +\infty[$.



V.2 Extremum

Définition V.5

Soit $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$ et M et m deux réels.

- On dit que M est **le maximum global** de f sur U si et seulement si

$$\exists x_0 \in U,\ f(x_0) = M \qquad \text{ET} \qquad \forall x \in U,\ f(x) \leqslant M.$$

- On dit que m est **le minimum global** de f sur U si et seulement si

$$\exists x_0 \in U,\ f(x_0) = m \qquad \text{ET} \qquad \forall x \in U,\ f(x) \geqslant m.$$

Remarque 42 : Par définition, le maximum global, respectivement le minimum global, de f sur U est le maximum, respectivement le minimum, de l'ensemble $f(U) = \{\, f(x) \mid x \in U \,\}$.

- Toute fonction f, même bornée n'admet pas forcément de maximum global ou/ni de minimum global.
  Par exemple la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} -1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \leqslant -1 \\ 0 & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases} \end{aligned}$$

  est majorée par 1, minorée par -1 mais n'admet pas de maximum ni de minimum.
- Le maximum global M ou le minimum global m lorsqu'il existe est unique (mais peut être atteint en plusieurs abscisses).

Remarque 43 : Soit $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.

- On dit que f atteint son maximum global sur U en a si et seulement si $f(a)$ est le maximum de f sur U.
- On dit que f atteint son minimum global sur U en a si et seulement si $f(a)$ est le minimum de f sur U.
- On dit que f atteint un extremum global sur U en a s'il atteint son maximum global ou son minimum global en a.

Remarque 44 :

1. Lorsque le maximum (ou le minimum) global existe il est nécessairement atteint en au moins un point.
2. Un maximum (ou un minimum) global peut être atteint plusieurs fois, voir même une infinité de fois.

Exemple 45 :

1. Déterminer en quel(s) point(s) le minimum global de $x \mapsto x^2 - 6x + 9$ sur $\mathbb{R}$ est atteint et donner la valeur de ce minimum.
2. Déterminer en quel(s) point(s) le maximum global de $x \mapsto \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ est atteint et donner la valeur de ce maximum.

Application 46 : démontrer des inégalités.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leqslant x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.
3. Montrer que pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

Les résultats donnés ci-dessus sont à connaître par coeur.

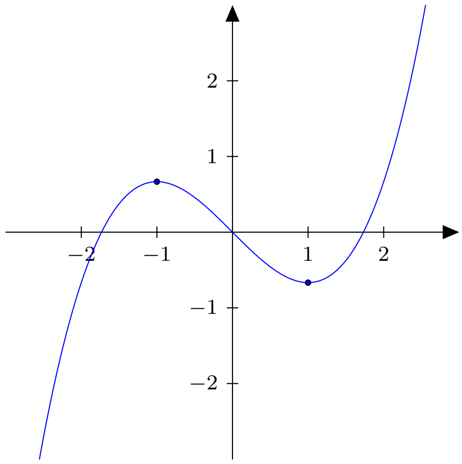
Définition V.6

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f admet **un maximum local** en a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in [a-\varepsilon; a+\varepsilon] \cap I$, $f(x) \leqslant f(a)$.
- On dit que f admet **un minimum local** en a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in [a-\varepsilon; a+\varepsilon] \cap I$, $f(x) \geqslant f(a)$.
- On dit que f admet **extremum local** en a s'il admet un maximum local ou un minimum local en a.

Exemple 47 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$.

1. La fonction f n'admet pas de maximum global ni de minimum sur $\mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
2. Montrons que f admet un minimum local en $x = 1$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} f(1+h) - f(1) = \frac{(1+h)^3}{3} - (1+h) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) &= \frac{1}{3} + h + h^2 + \frac{h^3}{3} - 1 - h - \frac{1}{3} + 1 \\ &= h^2 + \frac{h^3}{3} = h^2\left(1 + \frac{h}{3}\right). \end{aligned}$$
Donc pour tout $h \in [-3; 3]$, $f(1+h) - f(1) \geqslant 0$. Ainsi avec $\varepsilon = 3$, pour tout $x \in [1-\varepsilon; 1+\varepsilon]$, $f(x) \geqslant f(1)$ et f admet un minimum local en 1.
3. Montrons que f admet un maximum local en $x = -1$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} f(-1+h) - f(-1) = \frac{(-1+h)^3}{3} - (-1+h) - \left(\frac{-1}{3} + 1\right) &= -\frac{1}{3} + h - h^2 + \frac{h^3}{3} + 1 - h + \frac{1}{3} - 1 \\ &= -h^2 + \frac{h^3}{3} = h^2\left(1 - \frac{h}{3}\right). \end{aligned}$$
Donc pour tout $h \in [-3; 3]$, $f(-1+h) - f(-1) \geqslant 0$. Ainsi toujours avec $\varepsilon = 3$, on a pour tout $x \in [1-\varepsilon; 1+\varepsilon]$, $f(x) \leqslant f(-1)$ et f admet un maximum local en -1.
Ce résultat cohérent avec le fait que f étant impaire son graphe est symétrique par rapport au point $(0; 0)$ et donc le minimum local en 1 est transformé par cette symétrie en maximum local en -1.



Remarque 48 : Un extremum global est nécessairement un extremum local et la réciproque est fausse en générale.

Proposition V.7

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et $a \in I$. Pour que le point a soit un extremum local de f, IL FAUT que $f'(a) = 0$. On dit dans ce cas que a est **un point critique** de f.

Remarque 49 : Attention l'annulation de la dérivée est une condition nécessaire mais n'est pas suffisante. Par exemple la fonction $f : x \mapsto x^3$ possède une dérivée $f' : x \mapsto 3x^2$ qui s'annule en 0. Mais f n'admet pas de maximum ni de minimum en 0.

Exemple 50 : Reprenons l'exemple de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = x^2 - 1.$$

On voit bien que f' possède deux valeurs d'annulation en -1 et 1, qui sont donc potentiellement des extremums locaux. Pour s'en assurer rien de mieux qu'un bon tableau de variations.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

VI Fonction réciproque

VI.1 Injection, surjection, bijection

Définition VI.1

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(U, V)$.

- La fonction f est **injective** sur U ou est une **injection** de U dans V si tout élément de V admet AU PLUS un antécédent dans U par f.
- La fonction f est **surjective** sur V ou est une **surjection** de U dans V si tout élément de V admet AU MOINS un antécédent dans U par f.
- La fonction f est **bijective** ou est une bijection de U sur V si tout élément de V admet exactement UN antécédent dans U par f.

Remarque 51 : Une fonction f est une bijection de U dans V si et seulement si f est une injection et une surjection de U dans V.

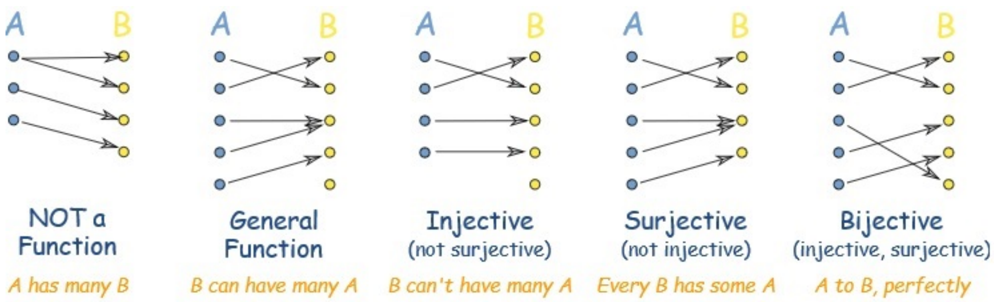
Exemple 52 : Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

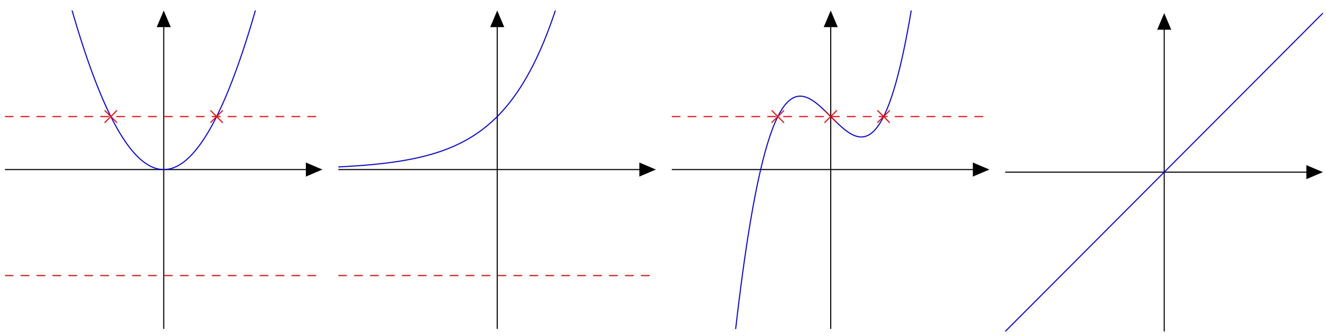
1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.
2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$.
3. $f_3 : [0; +\infty[\to [0; +\infty[$, $x \mapsto x^2$.
4. $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$.
5. $f_5 : [0; \frac{\pi}{2}[\to [-1; 1]$, $x \mapsto \cos(x)$.
6. $f_6 : [0; \pi] \to [-1; 1]$, $x \mapsto \cos(x)$.

Proposition VI.2

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(U, V)$.

1. La fonction f est injective sur U si et seulement si pour tout $(x, y) \in U^2$,
$$f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y.$$
2. La fonction f est surjective dans V si et seulement si pour tout $y \in V$,
$$\exists x \in U, \qquad f(x) = y.$$
3. La fonction f est une bijection de U dans V si et seulement si
$$\forall y \in V,\ \exists! x \in U, \qquad f(x) = y.$$





ni injective ni surjective — injective mais non surjective — surjective mais non injective — bijective

Exemple 53 :

1. Soit $f :]1; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\left(x^2 - 1\right)$. Montrer que f est injective.
2. Soit $g : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$. Montrer que g est surjective.

Proposition VI.3

Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ et $f : U \to V$. La fonction f est bijective si et seulement s'il existe une unique fonction $g : V \to U$ telle que pour tout $g \circ f = \mathrm{Id}_U$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_V$.

Démonstration. Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ et $f : U \to V$.
($\Rightarrow$) Supposons que f soit bijective. Alors pour tout $y \in V$, il existe un unique $x \in U$ tel que $f(x) = y$. On définit alors pour chaque $y \in V$ $g(y)$ comme étant l'unique antécédent de y par f : $g(y) = x$. Le fait que f soit surjective implique que $g(y)$ va bien avoir une valeur possible et le fait que f soit injective implique que le choix pour $g(y)$ ne se pose pas (car l'antécédent est alors unique) et donc $g(y)$ va bien prendre une unique valeur bien déterminée.

Montrons alors que pour tout $x \in U$, $g \circ f(x) = x$ puis que pour tout $y \in V$, $f \circ g(y) = y$.
Soit $x \in U$. Posons $y = f(x)$. Alors par définition de g, $g(y) = x$. Donc $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x$. Donc $g \circ f = \mathrm{Id}_U$.
Soit $y \in V$. Posons $x = g(y)$. Alors par définition de g, x est l'unique antécédent de y par f. Donc $f(x) = y$. Par conséquent, $f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y$. Donc $f \circ g = \mathrm{Id}_V$.
Nous avons donc établi UNE fonction g solution. Montrons qu'il n'y en a qu'une. Soit $h : U \to V$ vérifiant également $h \circ f = \mathrm{Id}_U$ et $f \circ h = \mathrm{Id}_V$. Soit $y \in U$. Posons $x = g(y)$ et $x' = h(y)$. Alors, en composant par f,

$$f(x) \underset{\text{def de } x}{=} f \circ g(y) \underset{f \circ g = \mathrm{Id}_V}{=} y \underset{f \circ h = \mathrm{Id}_V}{=} f \circ h(y) \underset{\text{def de } x'}{=} f(x')$$

Or f est injective donc $x = x'$ i.e. $g(y) = h(y)$ et par suite $g = h$.
($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons qu'il existe (une unique) $g : V \to U$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_U$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_V$. Montrons alors que f est injective et surjective.
Soit $y \in V$. Posons $x = g(y)$. Alors en composant par f, on obtient $f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = \mathrm{Id}_V(y) = y$. Donc x est UN antécédent de y par f. Ceci étant vrai pour tout $x \in V$, on en déduit que f est surjective.
Soit $(x, x') \in U^2$ tel que $f(x) = f(x')$. Alors en composant par g, on obtient $g(f(x)) = g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Or $g \circ f = \mathrm{Id}_U$. Par conséquent $x = x'$. Donc f est injective.
Ainsi f est bien bijective.

□

Remarque 54 : Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ et $f : U \to V$. On peut être plus général que la proposition précédente et démontrer que

1. La fonction f est injective si et seulement s'il existe $g : V \to U$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_U$.
2. La fonction f est surjective si et seulement s'il existe $g : V \to U$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_V$.

Définition VI.4

Soient U et V deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : U \to V$ une bijection. On appelle **fonction réciproque**, notée f^{-1}, l'unique fonction $V \to U$ telle que $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_U$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_V$.

Remarque 55 : La fonction réciproque f^{-1} est une fonction bijective et sa propre réciproque est f. Autrement dit $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Exemple 56 :

1. La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et sa réciproque est la fonction logarithme $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.
2. La fonction inverse $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction bijective égale à sa propre réciproque.
3. Montrer que $f :]1; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\left(x^2 - 1\right)$ est une bijection et déterminer sa fonction réciproque.

Proposition VI.5

Soient U et V deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : U \to V$ une bijection. Le graphe de la fonction réciproque f^{-1}, $\Gamma_{f^{-1}}$ est le symétrique du graphe de f, Γ_f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration. Soient $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ deux points du plan. Les points M et M' sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ si et seulement si $x' = y$ et $y' = x$.
Soient U et V deux parties de $\mathbb{R}$, $f : U \to V$ une bijection et $M(x; f(x)) \in \Gamma_f$ un point du graphe de f avec $x \in U$. Son symétrique est donc $M'(f(x); x) = M'\left(y; f^{-1}(y)\right)$ avec $y = f(x) \in V$. Donc $M' \in \Gamma_{f^{-1}}$. Réciproquement si $M\left(y; f^{-1}(y)\right) \in \Gamma_{f^{-1}}$ est un point du graphe de f^{-1}, avec $y \in V$. Alors son image $M'\left(f^{-1}(y); y\right) = (x; f(x))$, avec $x = f^{-1}(y) \in U$, est un point de Γ_f.

□

Théorème VI.6 (Théorème des valeurs intermédiaires - version strictement monotone)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes $a < b$ (éventuellement infinies) et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I alors pour tout λ compris entre les limites de f en a et b, il existe un unique $c \in I$ tel que $f(c) = \lambda$.

Remarque 57 : Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes $a < b$ (éventuellement infinies) et si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone sur I alors le théorème précédent assure que $J = f(I)$ est un intervalle. Il est de plus de même nature que I. Plus précisément :

I	si f est croissante	si f est décroissante
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b}f(x);f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a}f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a}f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a}f(x);\lim\limits_{x\to b}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b}f(x);\lim\limits_{x\to a}f(x)\right[$

Théorème VI.7 (Théorème de la bijection)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I alors

- $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$,
- f réalise une bijection de I dans J,
- l'application réciproque f^{-1} est une bijection de $J \to I$:
  continue et strictement monotone sur J, de même monotonie que f.

Proposition VI.8

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. Soient $a \in I$ et $b = f(a)$. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}.$$

Démonstration. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. D'après le théorème de la bijection, on sait que f est une bijection de I dans $J = f(I)$ et donc f^{-1} existe bien et est continue sur J. Soit $a \in I$ tel que f soit dérivable en a et tel que $f'(a) \neq 0$. Posons $b = f(a)$. Le taux d'accroissement de f^{-1} et b est donné par

$$\tau_b\left(f^{-1}\right)(y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b},$$

pour tout $y \in J \setminus \{b\}$. Posons $x = f^{-1}(y)$, alors,

$$\tau_b\left(f^{-1}\right)(y) = \frac{x-a}{f(x)-f(a)}.$$

Notez que le terme de droite dépend toujours de y mais que cette dépendance est cachée dans la variable x. Introduisons $\tau_a(f)$ le taux d'accroissement de f en a, $\tau_a(f)(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. On a donc

$$\tau_b\left(f^{-1}\right)(y) = \frac{1}{\tau_a(f)(x)} = \frac{1}{\tau_a(f)\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Lorsque $y \to b$, par continuité de f^{-1}, $f^{-1}(y) \to f^{-1}(b) = a$ et par la dérivabilité de f en a, on sait que $\tau_a(f)(x) \to f'(a)$ lorsque $x \to a$. Donc par composition de limites, on en déduit que $\tau_a(f)\left(f^{-1}(y)\right) \to f'(a)$ quand $y \to b$. Or $f'(a) \neq 0$, donc on peut composer par la fonction inverse pour conclure que

$$\lim_{y\to b} \tau_b\left(f^{-1}\right)(y) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Ainsi, f^{-1} est dérivable en b et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$. $\square$

Théorème VI.9 (Dérivée de la réciproque)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si

1. f est dérivable sur I,
2. f est strictement monotone sur I,
3. f' ne s'annule pas sur I,

Alors, f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$\forall x \in J, \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}.$$

Remarque 58 : Pour retrouver la formule de la dérivée de f^{-1}, il suffit de se souvenir que

$$\forall x \in J, \qquad f\left(f^{-1}(x)\right) = x.$$

Donc en utilisant la formule de la dérivation d'une fonction composée, on trouve que

$$\forall x \in J, \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) f'\left(f^{-1}(x)\right) = 1.$$

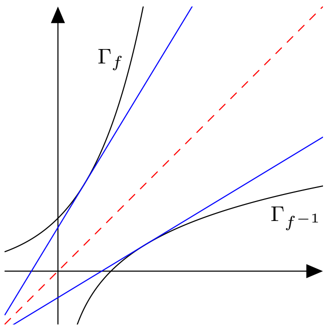
Puisque f' ne s'annule pas sur $I = f^{-1}(J)$, on en déduit bien que $\forall x \in J$, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$.

Remarque 59 : Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to J$ une fonction bijective et dérivable sur I. Puisque les graphes de Γ_f et de Γ_f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

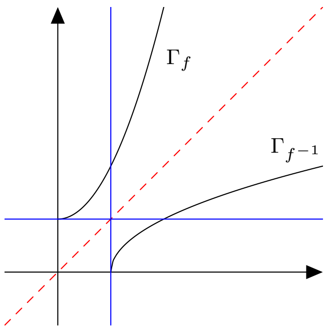
- Si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} admet une tangente au point $b = f(a)$ de pente $1/f'(a)$.
- Si $f'(a) = 0$ alors f^{-1} admet une tangente verticale au point $b = f(a)$.

Exemple 60 :

Si $I = \mathbb{R}$, $J = \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$.



Si $I = \mathbb{R}^+$, $J = [1; +\infty[$ et $f : x \mapsto x^2 + 1$.



VII Etude d'une fonction

Soit f une fonction.

- **Etape 1 :** avant toute chose, on s'assure que la fonction f est bien définie sur l'ensemble de départ considéré et si ce n'est pas le cas, on explicite $\mathscr{D}_f$ son ensemble de définition.
- **Etape 2 :** si la fonction est paire ou impaire ou périodique, on en profite pour réduire le domaine d'étude. Si f est paire ou impaire, il suffit d'étudier f sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_-$ pour en déduire par parité l'allure de f sur $\mathbb{R}$ tout entier. Si f est T-périodique, une étude sur un segment $[a; a+T]$ suffit pour déduire le reste du graphe de f sur $\mathbb{R}$ tout entier par translations de vecteurs $kT\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- **Etape 3 :** on étudie la régularité de f, si elle est continue sur l'ensemble considéré puis si elle est dérivable sur cet ensemble. Bien souvent il est possible de justifier directement sa dérivabilité ce qui implique alors sa continuité.
- **Etape 4 :** on calcule f' la dérivée de la fonction. Attention il est primordiale de ne pas avoir sauté l'étape précédente. Il est rigoureusement interdit de dériver une fonction pour laquelle on n'aura pas justifié au préalable qu'elle était dérivable.
- **Etape 5 :** étude du signe de f'. Un tableau de variation nécessite de connaitre le signe de f' et non juste ses valeurs d'annulation. Il est donc plus judicieux de résoudre des inéquations $f'(x) \geqslant 0$ ou $f'(x) \leqslant 0$ que simplement l'équation $f'(x) = 0$.

- **Etape 6 :** on dresse le tableau de variation de la fonction f que l'on complète si possible : valeurs des extremums et aux bornes du domaine ou plutôt valeurs des limites de la fonction aux bornes du domaine. On n'oublie pas de revenir au domaine tout entier grâce à la parité ou à la périodicité. Il peut nous être demandé certaines équations de tangentes de la courbe pour un meilleur tracé.
- **Etape 7 :** étude des asymptotes ou des branches paraboliques.
  1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$,
     on dit que la droite $x = a$ est **une asymptote verticale** à la courbe Γ_f.
  2. Soit $b \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$,
     on dit que la droite $y = b$ est **une asymptote horizontale** à la courbe Γ_f.
  3. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
     (i) Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ et si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$,
     on dit que la droite $y = ax + b$ est **une asymptote oblique** à la courbe Γ_f.
     (ii) Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ et si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = +\infty \in \mathbb{R}$,
     on dit que la courbe Γ_f admet **une branche parabolique de direction asymptotique** $y = ax$ en $+\infty$.
     (iii) Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$,
     on dit que la courbe Γ_f admet **une branche parabolique de direction asymptotique** (Ox) en $+\infty$.
     (iv) Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$,
     on dit que la courbe Γ_f admet **une branche parabolique de direction asymptotique** (Oy) en $+\infty$.

Remarque 61 : Une courbe s'approche toujours infiniment près de son asymptote alors qu'une branche parabolique donne juste une notion de direction asymptotique du graphe. Par exemple la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet une branche parabolique de direction (Ox) pourtant la fonction racine carré diverge vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$ et dépasse n'importe quelle asymptote horizontale. Seulement sa croissance est lente et même de plus en plus lente (son accélération/sa dérivée seconde est négative) ce qui donne à la courbe une allure de s'aplatir de plus en plus.

VIII Prochainement...
Analyse Asymptotique - Définition de la négligeabilité

Dans tout ce paragraphe $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide i.e. ni vide ni un singleton. On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. On dit que I est un voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ si $a \in I$ ou $a = \sup(I)$ ou $a = \inf(I)$.

Définition VIII.1

- *Fonctions :* Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et f et g deux éléments de $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. On suppose que $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$. On dit que f est **négligeable** devant g en a, noté

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \qquad \text{ou encore} \qquad f(x) \underset{x\to a}{\ll} g(x)$$

  si et seulement si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

- *Suites :* Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, noté

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \qquad \text{ou encore} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\ll} v_n$$

  si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Remarque 62 : Il n'est pas indispensable de supposer g (ou $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$) jamais nul. Une définition plus formelle permet de traiter le cas où g (ou $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$) s'annule mais cette définition est bien plus lourde et extrêmement peu pratique pour notre usage. La voici : il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{K}$ telle que $\forall x \in I$, $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ et telle que $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

Remarque 63 :

- Pour une suite la variable n tend **nécessairement** vers $+\infty$. Ce n'est pas forcément le cas pour les fonctions. Dans la définition de la négligeabilité pour les fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ n'est pas nécessairement un élément de I et peut même être égal à $\pm\infty$.
- La négligeabilité $f(x) \underset{x \to a}{=} o\left(g(x)\right)$ est aussi parfois notée $f = o_a\left(g\right)$ ou $f(x) = o_a\left(g(x)\right)$.

Remarque 64 : IMPORTANT : on a toujours : $f(x) \underset{x \to a}{=} o(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. De même pour une suite : $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(1)$ si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exemple 65 :

1. $x^2 \underset{x \to +\infty}{\ll} x^4$ ou encore $x^2 \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^4\right)$,
2. $x^2 \underset{x \to 0}{\gg} x^4$ ou encore $x^4 \underset{x \to 0}{=} o\left(x^2\right)$,
3. $\dfrac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\gg} \dfrac{1}{x^2}$ ou encore $\dfrac{1}{x^2} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$,
4. $\dfrac{1}{x} \underset{x \to 0}{\ll} \dfrac{1}{x^2}$ ou encore $\dfrac{1}{x} \underset{x \to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$,
5. $x \underset{x \to +\infty}{\ll} \mathrm{e}^x$ ou encore $x \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^x\right)$,
6. $x \underset{x \to 0}{\ll} \mathrm{e}^x$ ou encore $x \underset{x \to 0}{=} o\left(\mathrm{e}^x\right)$,
7. $n \underset{n \to +\infty}{\ll} n^2$ ou encore $n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(n^2\right)$,
8. $2^n \underset{n \to +\infty}{\ll} 3^n$ ou encore $2^n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(3^n\right)$,
9. $\dfrac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\gg} \dfrac{1}{n^2}$ ou encore $\dfrac{1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$,
10. $\sqrt{n} \underset{n \to +\infty}{\gg} \mathrm{e}^{-n^2}$ ou encore $\mathrm{e}^{-n^2} \underset{n \to +\infty}{=} o(\sqrt{n})$.

Interprétation. Les petits o permettent de formaliser l'idée suivant laquelle les suites ou les fonctions en un point ont une « vitesse » de convergence et de comparer ces vitesses. Par exemple :

- Si deux fonctions f, g converge vers 0 en a et si $f\left(x\right) \underset{x \to a}{=} o(g)$, on dira que la fonction f converge plus vite vers 0 que la fonction g en a.
- De même si deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0, et si $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n)$, on dira que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge plus vite vers 0 que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- A l'inverse, si deux fonctions f, g tendent vers $+\infty$ en a et si $f \underset{x \to a}{=} o(g)$, on dira que la fonction g tend plus vite vers $+\infty$ que la fonction f en a.
- De même, si deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$ et si $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n)$ on dira que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge plus vite vers $+\infty$ que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (notez l'inversion de la rapidité par rapport au cas de la convergence vers 0).

Attention ne confondez pas ordre de majoration et vitesse. Par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2n)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours plus grande que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais bien que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge « deux fois plus rapidement » que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est faux d'affirmer que $v_n \ll u_n$. On dira plutôt que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont des vitesses de divergence comparables (à un facteur 2 près). Pour être négligeable il faut donc diverger/converger « *beaucoup* moins rapidement ».

LEIBNIZ Gottfried Wilhelm *(Leipzig, 1646 - Hanovre 1716) fut un philosophe et mathématicien allemand. Eduqué dans la pensée luthérienne par son père professeur de philosophie morale, il fut dès l'âge de six ans un lecteur assidu en campant dans la bibliothèque de son père. Il entra à quinze ans à l'université de Leibzig où il étudia la philosophie, la théologie et le droit. Considéré comme trop jeune, il dut attendre ses vingt ans pour passer son doctorat de droit. Etant devenu diplomate, il fut envoyé en France pour empêcher un conflit entre Louis XIV et les princes allemands et y rencontra Huygens avec qui il se lia d'amitié. Encouragé par Huygens, Leibniz se tourna alors vers les mathématiques. En 1673, il fut admis à la Royal Society. Quelques années plus tard, de retour en Allemagne, il fonda la revue Acta Eruditorium, qui lui permit de diffuser ses découvertes, ses notations et de rester en contact avec les frères Bernoulli.*
En 1700, il créa l'Académie de Berlin mais la fin de sa vie fut assombrie par sa relative disgrâce auprès des souverains d'Hanovre et sa querelle avec Newton qui l'accusera d'avoir développé ses idées du calcul différentiel après avoir lu son manuscrit. La paternité de la théorie fut l'objet d'une grande polémique. Les historiens s'accordent aujourd'hui à dire que Leibniz et Newton ont développé plus ou moins indépendamment leur théorie du calcul différentiel. Leibniz est surtout connu du grand public pour ces conceptions philosophiques et les mathématiques ne sont qu'une petite partie de son oeuvre. Pourtant il apporta de nombreux résultats et dans un souci de se faire comprendre il introduisit de nombreuses notations. On lui doit le d *de la différentiation et le signe intégral* $\int$*. Il fut le premier à utiliser le terme de fonction.*

Pour tout réel x, on a

$$x^2 = x \times x = \underbrace{x + x + \cdots + x + x}_{x \text{ fois}}.$$

Or la fonction $x \mapsto x^2$ étant dérivable, en dérivant, on obtient

$$2x = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1}_{x \text{ fois}} = x.$$

L'égalité étant vraie pour tout réel x, on en déduit que

$$2 = 1.$$

N'y aurait-il pas une (voire deux ?) erreur de raisonnement ?

Deux personnes font un tour en montgolfière mais se perdent. Elles décident de descendre un peu pour demander leur chemin à deux autres personnes se promenant par là. Elles s'approchent et demande :
« Pardonnez-moi vous pourriez-nous dire où nous sommes ? »
Les deux randonneurs se regardent, délibèrent un long moment puis répondent :
« Sans erreur possible, vous êtes dans une montgolfière ! »
Les deux personnes de la montgolfière interloquées, remercient malgré tout les promeneurs et reprennent de l'altitude. Plus tard, l'un deux décrète :
« -A mon avis, ces deux personnes étaient certainement des mathématiciens.
-Qu'est-ce qui te fait dire cela ?
-C'est pourtant clair, ils ont mis beaucoup de temps à nous répondre. Ce qu'ils nous ont dit est parfaitement juste mais ne nous sert malheureusement strictement à rien. »
Pendant ce temps, de leur côté, les mathématiciens devisent également :
« Aucun doute, ces personnes dans la montgolfière étaient des physiciens, ils nous posent des questions complètement évidentes et après cela va être encore de notre faute s'ils sont complètement perdus... »