Chapitre XXI : Applications linéaires

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

I Généralités

I.1 Définition

Définition I.1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application de E dans F. On dit que f est **une application linéaire** si et seulement si

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in E^2, \qquad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Remarque 1 :

1. Une application linéaire est une fonction qui « préserve/est compatible » avec les structures d'espaces vectoriels de E et F.
2. En particulier pour tout (x, y), $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Définition I.2

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- Si $F = E$, une application linéaire de E dans E, est appelée **un endomorphisme** de E.
- On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Si $F = \mathbb{K}$, une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée **une forme linéaire**.

Proposition I.3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On a

1. $f(0_E) = 0_F$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ on a
$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$
3. Soit G un sous-espace vectoriel de E. Alors $f_{|G}$ est une application linéaire de G dans F : $f_{|G} \in \mathscr{L}(G, F)$.

Démonstration.

1. Soit $x \in E$. En prenant $y = x$, $\lambda = 1$ et $\mu = -1$, comme f est linéaire :
$$f(0_E) = f(x - x) = f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = f(x) - f(x) = 0_F.$$
2. Exercice : procédez par récurrence sur n.
3. Il suffit de dérouler les définitions.

□

Exemple 2 :

1. L'application nulle $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & 0_F \end{array} \right.$ est linéaire.
2. L'application identité $\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ est un endomorphisme.

3. Plus généralement, toute homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$, $h_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array} \right.$ est un endomorphisme de E.

4. La translation de vecteur $a \in E \setminus \{0_E\}$ $\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x + a \end{array} \right.$ n'est pas linéaire.
5. La dérivation sur les fonctions $D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & D(f) = f' \end{array} \right.$ est linéaire (on peut aussi parler de la dérivation comme un élément de $\mathscr{L}(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}))$ par exemple).
6. La dérivation sur les polynômes $D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & D(P) = P' \end{array} \right.$ est un endomorphisme (on peut aussi parler de la dérivation comme un élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n-1}[X])$).
7. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'application $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & ax + by \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.
8. L'évaluation en un réel $x_0 \in \mathbb{R}$, $\Phi_{x_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(x_0) \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (on peut aussi parler de l'évaluation des polynômes dans $\mathbb{K}$).
9. L'intégrale $I : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathscr{C}([0;1], \mathbb{R})$.
10. L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, y - z) \end{array} \right.$ est linéaire.

I.2 L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$

- On peut sommer deux applications linéaires qui ont le même ensemble de départ E et le même ensemble d'arrivée F. Pour tout $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F)$, on pose
$$f + g : \left\{ \begin{array}{ll} E & \to F \\ x & \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x). \end{array} \right.$$
- On peut également multiplier une application linéaire par un scalaire : pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\lambda f : \left\{ \begin{array}{ll} E & \to F \\ x & \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{array} \right.$$
- Enfin on peut composer deux applications linéaires lorsque l'espace d'arrivée de la première coïncide avec l'espace de départ de la seconde : pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et tout $g \in \mathscr{L}(F, G)$
$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ll} E & \to G \\ x & \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)). \end{array} \right.$$
En particulier si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme, on peut composer f par f : $f \circ f$ et recommencer. On note alors
$$f^0 = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Proposition I.4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ est un espace vectoriel.

Démonstration.

- $\mathscr{L}(E,F) \subseteq \mathscr{F}(E,F)$ par définition.
- Si $f = 0_{\mathscr{F}(E,F)}$, alors f est linéaire. En effet, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $\forall (x,y) \in E^2$,

$$f(\lambda x + \mu y) = 0_F = \lambda\, 0_F + \mu 0_F = \lambda\, f(x) + \mu f(y)\,.$$

Donc $0_{\mathscr{F}(E,F)} \in \mathscr{L}(E,F)$ et on le notera $0_{\mathscr{L}(E,F)}$.

- Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$. Posons $h = \lambda\, f + \mu g$ et montrons que $h \in \mathscr{L}(E,F)$. Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(x,y) \in E^2$. Alors, on a les égalités vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned} h(\alpha x + \beta y) &= \lambda\, f(\alpha x + \beta y) + \mu g(\alpha x + \beta y) \\ &= \lambda\, \alpha f(x) + \lambda\, \beta f(y) + \mu \alpha g(x) + \mu \beta g(y) && \text{car } f \in \mathscr{L}(E,F) \text{ et } g \in \mathscr{L}(E,F) \\ &= \alpha\left(\lambda\, f(x) + \mu g(x)\right) + \beta\left(\lambda\, f(y) + \mu g(y)\right) \\ &= \alpha h(x) + \beta h(y). \end{aligned}$$

Donc $h \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{L}(E,F)$ est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,F)$.

□

Proposition I.5

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.
2. Si $f \in \mathscr{L}(E)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathscr{L}(E)$.

Démonstration.

1. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x,y) \in E^2$. Alors

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda\, x + \mu y) = g\left(f(\lambda\, x + \mu y)\right) &= g\left(\lambda\, f(x) + \mu f(y)\right) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \lambda\, g\left(f(x)\right) + \mu g\left(f(y)\right) && \text{car } g \text{ est linéaire} \\ &= \lambda\, g \circ f(x) + \mu g \circ f(y). \end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est bien linéaire.

2. C'est une conséquence du point précédent et d'une récurrence.

□

Proposition I.6

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(F,G)$. L'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{L}(E,G) \\ g & \mapsto & f \circ g \end{array}$ est linéaire :

$$\forall (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (g_1,g_2) \in \mathscr{L}(E,F)^2, \qquad f \circ (\lambda_1\, g_1 + \lambda_2\, g_2) = \lambda_1\, f \circ g_1 + \lambda_2\, f \circ g_2.$$

2. Soit $g \in \mathscr{L}(E,F)$. L'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(F,G) & \to & \mathscr{L}(E,G) \\ f & \mapsto & f \circ g \end{array}$ est linéaire :

$$\forall (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (f_1,f_2) \in \mathscr{L}(E,F)^2, \qquad (\lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2) \circ g = \lambda_1\, f_1 \circ g + \lambda_2\, f_2 \circ g.$$

Démonstration. Montrons le premier point.

Soit $f \in \mathscr{L}(F,G)$ et $\psi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{L}(E,G) \\ g & \mapsto & f \circ g \end{array}$. Montrons que ψ est linéaire. Soient $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, $(g_1,g_2) \in \mathscr{L}(E,F)^2$. Montrons que

$$\psi(\lambda_1\, g_1 + \lambda_2\, g_2) = \lambda_1\, \psi(g_1) + \lambda_2\, \psi(g_2)$$

ou encore,

$$f \circ (\lambda_1\, g_1 + \lambda_2\, g_2) = \lambda_1\, f \circ g_1 + \lambda_2\, f \circ g_2.$$

Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} f\circ(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2)(x) &= f(\lambda_1 g_1(x)+\lambda_2 g_2(x)) \\ &= \lambda_1 f(g_1(x))+\lambda_2 f(g_2(x)) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \lambda_1 f\circ g_1(x)+\lambda_2 f\circ g_2(x). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que

$$f\circ(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2)=\lambda_1 f\circ g_1+\lambda_2 f\circ g_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \psi(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2)=\lambda_1\psi(g_1)+\lambda_2\psi(g_2).$$

Conclusion, ψ est linéaire.
Le second point est laissé en exercice. Vous remarquerez que celui-ci ne requiert pas la linéarité de g. $\square$

Proposition I.7

Soient E un espace vectoriel, f et g deux **endomorphismes** de E, $(f,g)\in(\mathscr{L}(E))^2$. On suppose que f et g **commutent** i.e. $f\circ g=g\circ f$, alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

1. $(f\circ g)^n=f^n\circ g^n=g^n\circ f^n$,
2. *(formule de Leibniz)* $(f+g)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^k\circ g^{n-k}$,
3. *(formule de Bernoulli)* si $n\geqslant 1$, alors $f^n-g^n=(f-g)\circ\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}f^k\circ g^{n-1-k}\right)$.

I.3 Noyau et Image

Définition I.8

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f\in\mathscr{L}(E,F)$.

- On appelle **noyau** de f l'ensemble des antécédents de 0_F par f, i.e. l'image réciproque de $\{0_F\}$, noté $\operatorname{Ker}(f)$:
$$\operatorname{Ker}(f)=f^{-1}(0_F)=\{x\in E \mid f(x)=0_F\}.$$
- On appelle **image** de f l'ensemble des images de E par f, i.e. l'image directe de E par f, noté $\operatorname{Im}(f)$:
$$\operatorname{Im}(f)=f(E)=\{f(x)\in F \mid x\in E\}=\{y\in F \mid \exists x\in E,\ y=f(x)\}.$$

Remarque 3 : On en parle toujours d'image directe pour n'importe quelle application mais on ne parle de noyau QUE pour des applications LINEAIRES (c'est l'usage).

Proposition I.9

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f\in\mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire. Alors

1. le noyau $\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E
2. l'image $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration.

1. Montrons que $\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
   - Par définition $\operatorname{Ker}(f)\subseteq E$.
   - On a vu dans la proposition I.3 que puisque f est linéaire, $f(0_E)=0_F$. Donc on a bien $0_E\in\operatorname{Ker}(f)$.
   - Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ et $(x,y)\in\operatorname{Ker}(f)^2$. Posons $z=\lambda x+\mu y$. Alors
   $$\begin{aligned} f(z)=f(\lambda x+\mu y) &= \lambda f(x)+\mu f(y) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \lambda\times 0_F+\mu 0_F && \text{car } x\in\operatorname{Ker}(f) \text{ et } y\in\operatorname{Ker}(f) \\ &= 0_F. \end{aligned}$$
   Par conséquent $z=\lambda x+\mu y\in\operatorname{Ker}(f)$ qui est donc un ensemble stable par combinaison linéaire.

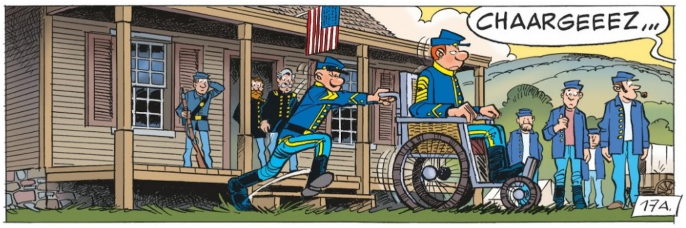
Conclusion $\operatorname{Ker}(f)$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

2. Montrons que $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-ensemble vectoriel de F.
   - Par définition, $\operatorname{Im}(f) \subseteq F$.
   - On sait toujours (proposition I.3) que $f(0_E) = 0_F$. Donc le vecteur 0_F admet au moins un antécédent (0_E par exemple) par f. Donc $0_F \in \operatorname{Im}(f)$.
   - Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et $(y_1, y_2) \in \operatorname{Im}(f)^2$. Montrons que $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ appartient à $\operatorname{Im}(f)$. Puisque $y_1 \in \operatorname{Im}(f)$, il existe $x_1 \in E$ tel que $f(x_1) = y_1$. De même, $y_2 \in \operatorname{Im}(f)$ donc il existe $x_2 \in E$ tel que $f(x_2) = y_2$. Par suite,
   $$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire.}$$
   En posant $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, on observe que $y = f(x)$ et donc on a trouvé un antécédent pour y. Ainsi $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \operatorname{Im}(f)$ et l'ensemble $\operatorname{Im}(f)$ est stable par combinaison linéaire.

Conclusion, l'ensemble $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

□

Exemple 4 :



Dans chacun des cas suivants déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire.

1. $f : \begin{cases} E & \to & F \\ x & \mapsto & 0_F \end{cases}$
2. $f = \operatorname{Id}_E$
3. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{cases}$
4. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, x-y+z, y-z) \end{cases}$

Proposition I.10

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
1. Si A est un sous-espace vectoriel de E alors $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si B est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 5 : La proposition I.9 est un cas particulier de ce résultat.

Démonstration.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Montrons
   $$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}$$
   est un sous-espace vectoriel de F.
   - Par définition $f(A) \subseteq F$.
   - Puisque A est un sous-espace vectoriel de E, on sait que $0_E \in A$. Donc $f(0_E) \in f(A)$. Or $f(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in f(A)$.
   - Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et $(y_1, y_2) \in f(A)^2$. Posons $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. Puisque y_1 et y_2 sont dans $f(A)$, il existe $x_1 \in A$ et $x_2 \in A$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Donc
   $$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire.}$$
   Posons $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$. Puisque A est un sous-espace vectoriel et que x_1 et x_2 sont dans A, on en déduit que $x \in A$. Or $y = f(x)$. On a donc construit pour y un antécédent de y qui soit dans A. Donc $y \in f(A)$. Ainsi $f(A)$ est stable par combinaison linéaire.

Conclusion, $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.

2. Soit B un sous-espace vectoriel de F. Montrons que

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

- Par définition $f^{-1}(B) \subseteq E$.
- Si $x = 0_E$. Comme f est linéaire, $f(0_E) = 0F$. Or B est un sous-espace vectoriel de F. Donc $0_f \in B$. Donc $f(0_E) \in B$ et donc $0_E \in f^{-1}(B)$.
- Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et $(x_1, x_2) \in f^{-1}(B)$. Montrons que $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in f^{-1}(B)$ i.e. $f(x) \in B$. On a

$$f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire.}$$

Par définition, x_1 et x_2 sont deux éléments de $f^{-1}(B)$ i.e. $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont deux éléments de B. Or B est un sous-espace vectoriel donc

$$\lambda_1 \underbrace{f(x_1)}_{\in B} + \lambda_2 \underbrace{f(x_2)}_{\in B} \in B.$$

Donc $f(x) \in B$ autrement dit $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x \in f^{-1}(B)$. Donc $f^{-1}(B)$ est stable par combinaison linéaire.

Conclusion $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de B.

□

I.4 Projecteur et symétrie

Définition I.11

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

- On appelle **projecteur** ou **projection** sur F parallèlement à G, l'application p qui a tout élément de E renvoie sa composante dans F :

$$p : \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \rightarrow & E \\ x = \underbrace{x_1}_{\in F} + \underbrace{x_2}_{\in G} & \mapsto & p(x) = x_1 \end{array}.$$

- On appelle **symétrie** sur F parallèlement à G, l'application s définie par

$$s : \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \rightarrow & E \\ x = \underbrace{x_1}_{\in F} + \underbrace{x_2}_{\in G} & \mapsto & s(x) = x_1 - x_2 \end{array}.$$

Dessin :

Remarque 6 :

1. Puisque les espaces sont supplémentaires, la décomposition de x en $x_1 + x_2$ existe toujours et est unique. Donc pour chaque x, $p(x)$ et $s(x)$ existent et sont uniques (important pour que p et s soient correctement définies). Il est VITAL que les espaces F et G soient supplémentaires.
2. Attention un sous-espace vectoriel F ne possède pas un unique supplémentaire G. Donc il n'existe pas une unique projection ou symétrie sur F mais une infinité (sauf si $F = E$ ou $\{0_E\}$) suivant la direction choisie.

Exemple 7 :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer la projection et la symétrie sur $F = \text{Vect}(1,1)$ parallèlement à $G_1 = \text{Vect}(1,0)$, $G_2 = \text{Vect}(0,1)$ et $G_3 = \text{Vect}(1,-1)$.
2. Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $F = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(-X) = P(X) \}$ et $G = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(-X) = -P(X) \}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$ et déterminer la projection p et la symétrie s sur F parallèlement à G.

Proposition I.12

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, p la projection sur F parallèlement à G. Alors

1. $p \in \mathscr{L}(E)$
2. $F = \text{Im}(p) = \{ x \in E \mid p(x) = x \} = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$
3. $G = \text{Ker}(p)$.

Démonstration.

1. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $x = x_1 + x_2 \in F \oplus G = E$, $y = y_1 + y_2 \in F \oplus G = E$. Posons $z = \lambda x + \mu y$, on a
$$z = \lambda x + \mu y = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2).$$
Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels, $z_1 = \lambda x_1 + \mu y_1 \in F$ et $z_2 = \lambda x_2 + \mu y_2 \in G$. Par définition de p, on a donc,
$$p(\lambda x + \mu y) = p(z) = z_1 = \lambda x_1 + \mu y_1 = \lambda p(x) + \mu p(y).$$
Conclusion, p est linéaire.
2. Soit $x \in F$. Alors $x = x + 0_E \in F \oplus G$ et donc par définition, $p(x) = x$. Donc $F \subseteq \{ x \in E \mid p(x) = x \}$.
Soit $x \in \{ x \in E \mid p(x) = x \}$ i.e. $p(x) = x$ et donc $x = p(x) \in \text{Im}(p)$. Donc $\{ x \in E \mid p(x) = x \} \subseteq \text{Im}(p)$.
Enfin, soit $x \in \text{Im}(p)$, alors il existe $x' \in E$ tel que $x = p(x')$. Notons $x' = x'_1 + x'_2 \in F \oplus G = E$, alors $x = p(x') = x'_1 \in F$. Donc $\text{Im}(p) \subseteq F$. Conclusion, $F = \text{Im}(p) = \{ x \in E \mid p(x) = x \}$.
3. Soit $x \in G$. Alors $x = 0_E + x \in F \oplus G = E$. Par définition, $p(x) = 0_E$. Donc $x \in \text{Ker}(p)$. Donc $G \subseteq \text{Ker}(p)$.
Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(p)$. Alors $p(x) = 0_E$. Notons $x = x_1 + x_2 \in F \oplus G$. Alors, $0_E = p(x) = x_1$. Donc $x = 0_E + x_2 = x_2 \in G$. Donc $\text{Ker}(p) \subseteq G$. Conclusion, $G = \text{Ker}(p)$.

□

Proposition I.13

Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(E)$. On a l'équivalence suivante :
$$p \circ p = p \qquad \Leftrightarrow \qquad p \text{ est une projection.}$$

Remarque 8 : Dans ce cas, par la proposition précédente, p est une projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement sur $\text{Ker}(p)$. On appelle ces deux espaces les espaces caractéristiques de la projection.

Démonstration. Supposons que $p \circ p = p$. Montrons que p est une projection sur $F = \text{Im}(p)$, parallèlement à $G = \text{Ker}(p)$. Commençons par montrer que ces espaces sont supplémentaires.
Soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in F = \text{Im}(p)$ i.e. il existe $x' \in E$ tel que $x = p(x')$. De plus, $x \in G = \text{Ker}(p)$ donc $0_E = p(x) = p(p(x')) = p \circ p(x')$. Or $p \circ p = p$ par hypothèse. Donc $0_E = p(x') = x$. Ainsi $F \cap G \subseteq \{0_E\}$. Or $\{0_E\} \subseteq F \cap G$. Donc $F \cap G = \{0_E\}$ donc F et G sont en somme directe.
Soit $x \in E$. On cherche la décomposition de x en un élément x_1 de F et x_2 de G. Procédons par analyse-synthèse.
Analyse. Soient $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$. On a $x_1 \in F = \text{Im}(p)$ donc il existe $z \in E$ tel que $x_1 = p(z)$ et $x_2 \in G = \text{Ker}(p)$ donc $p(x_2) = 0_E$. Dès lors,
$$\begin{aligned} p(x) = p(x_1 + x_2) &= p(x_1) + p(x_2) && \text{car } p \text{ est linéaire} \\ &= p \circ p(z) + 0_E \\ &= p(z) && \text{car } p \circ p = p \\ &= x_1. \end{aligned}$$
Donc $x_1 = p(x)$. Puis, on a directement $x_2 = x - x_1 = x - p(x)$.
Synthèse. Posons $x_1 = p(x)$ et $x_2 = x - p(x)$. Montrons que

1. $x = x_1 + x_2$
2. $x_1 \in F$

3. $x_2 \in G$

Pour le point 1, on a $x_1 + x_2 = p(x) + x - p(x) = x$, OK !
Pour le point 2, $x_1 = p(x) \in \operatorname{Im}(p) = F$, OK !
Enfin, pour le point 3,

$$\begin{aligned} p(x_2) = p(x - p(x)) &= p(x) - p \circ p(x) && \text{car } p \text{ est linéaire} \\ &= p(x) - p(x) && \text{car } p \circ p = p \\ &= 0_E. \end{aligned}$$

Donc $x_2 \in \operatorname{Ker}(p) = G$. Ainsi, $x = p(x) + x - p(x) \in F + G$. Donc $E \subseteq F + G$. Or $F + G \subseteq E$. D'où $F + G = E$.
Nous pouvons donc bien affirmer que F et G sont supplémentaires dans E, $E = F \oplus G$. De plus par l'analyse précédente, nous avons établi que pour tout $x = x_1 + x_2 \in E = F \oplus G$, $p(x) = x_1$, donc p est bien la projection sur F parallèlement à G.
Notez que l'analyse précédente démontre aussi l'unicité de la décomposition et donc remontre que F et G sont en somme directe.
Réciproquement, si p est une projection, par la proposition précédente, on sait que p est la projection sur $\operatorname{Im}(p) = F$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p) = G$. Montrons que pour tout $x \in E$, $p \circ p(x) = p(x)$. On sait que $x' = p(x) \in \operatorname{Im}(p) = F = \{ a \in E \mid p(a) = a \}$. Donc $p(x') = x'$ i.e. $p(p(x)) = p(x)$. Conclusion, $p \circ p = p$.

□

Remarque 9 : Pour montrer que p est une projection, il suffit de montrer que $p \circ p = p$ puis l'on détermine les espaces caractéristiques $\operatorname{Im}(p)$ et $\operatorname{Ker}(p)$. ATTENTION cependant de ne pas oublier de montrer au préalable que p est linéaire !

Proposition I.14

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E et s la symétrie sur F parallèlement à G et p la projection associée. Alors,

1. $s = 2p - \mathrm{Id}_E$
2. $s \in \mathrm{GL}(E)$ (endomorphisme bijectif cf ci-après)
3. $F = \{ x \in E \mid s(x) = x \} = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$
4. $G = \{ x \in E \mid s(x) = -x \} = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$

Démonstration.

1. Par définition, pour tout $x = x_1 + x_2 \in E = F \oplus G$, on a $p(x) = x_1$ et $s(x) = x_1 - x_2 = 2x_1 - (x_1 + x_2) = 2p(x) - x$. D'où, $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.
2. En tant que différence de deux endomorphismes, s est également un endomorphisme. De plus, on remarque que
$$s \circ s = (2p - \mathrm{Id}_E) \circ (2p - \mathrm{Id}_E) = 4p^2 - 4p + \mathrm{Id}_E = 4p - 4p + \mathrm{Id}_E \qquad \text{car } p \text{ est une projection}$$
Donc $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. On en déduit que s est bijective et même $s^{-1} = s$.
3. Soit $x \in E$. Puisque $s = 2p - \mathrm{Id}_E$, on a aussi $p = \frac{s + \mathrm{Id}_E}{2}$ donc
$$\begin{aligned} x \in F \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s + \mathrm{Id}_E}{2}(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad s(x) + x = 2x \\ &\Leftrightarrow \quad s(x) = x \\ &\Leftrightarrow \quad s(x) - x = 0_E \\ &\Leftrightarrow \quad (s - \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E. \end{aligned}$$
On en déduit bien que $F = \{ x \in E \mid s(x) = x \} = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$.
4. De même, pour $x \in E$,
$$x \in G \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s + \mathrm{Id}_E}{2}(x) = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad s(x) + x = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad s(x) = -x.$$

□

Proposition I.15

Soit E un espace vectoriel et $s \in \mathscr{L}(E)$. On a l'équivalence suivante :

$$s \circ s = \mathrm{Id}_E \quad \Leftrightarrow \quad s \text{ est une symétrie.}$$

Démonstration. Si s est une symétrie, alors en notant p la projection associée, on a $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ et donc

$$s \circ s = (2p - \mathrm{Id}_E) \circ (2p - \mathrm{Id}_E) = 4p^2 - 4p + \mathrm{Id}_E = 4p - 4p + \mathrm{Id}_E \qquad \text{car } p \text{ est une projection}$$

Donc $s^2 = \mathrm{Id}_E$.
Réciproquement, si s est un endomorphisme tel que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Posons $p = \frac{s+\mathrm{Id}_E}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned} p^2 = \left(\frac{s+\mathrm{Id}_E}{2}\right) \circ \left(\frac{s+\mathrm{Id}_E}{2}\right) = \frac{s^2 + s\circ \mathrm{Id}_E + \mathrm{Id}_E \circ s + \mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E}{4} &= \frac{s^2 + 2s + \mathrm{Id}_E}{4} \\ &= \frac{\mathrm{Id}_E + 2s + \mathrm{Id}_E}{4} \\ &= \frac{s+\mathrm{Id}_E}{2} = p. \end{aligned}$$

Donc par la proposition I.13 p est une projection et donc pour tout $x = x_1 + x_2 \in \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, $s(x) = 2p(x) - \mathrm{Id}_E(x) = 2x_1 - (x_1 + x_2) = x_1 - x_2$. On en déduit bien que s est une symétrie sur $F = \mathrm{Im}\,(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(p)$.

□

Exemple 10 :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que $p : (x, y) \mapsto \left(\frac{x+2y}{5}, \frac{2x+4y}{5}\right)$ est une projection et déterminer ses éléments caractéristiques.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $s : X \mapsto AX$ est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.
3. Dans $\mathbb{C}$, montrer que $s : z \mapsto \overline{z}$ est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.
4. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, montrer que $p : P \mapsto P(0) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2}X^2$ est une projection et déterminer ses éléments caractéristiques.
5. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $p : A \mapsto \frac{A^T + A}{2}$ est une projection et déterminer ses éléments caractéristiques.
6. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $s : A \mapsto A^T$ est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

II Injection, surjection, isomorphisme

II.1 Définition et caractérisation

Proposition II.1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. L'application f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$.
2. L'application f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) = F$.

Démonstration.

1. Supposons que f soit injective. Montrons que $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$. On sait que $\{0_E\} \subseteq \mathrm{Ker}\,(f)$ car f est linéaire ou encore que $\mathrm{Ker}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Alors,
$$f(x) = 0_F = f(0_E) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire.}$$
Or f est injective donc $x = 0_E$. D'où $\mathrm{Ker}\,(f) \subseteq \{0_E\}$. Conclusion $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$.
Supposons que $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$. Montrons que f est injective. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors, par linéarité de f,
$$0_E = f(x) - f(y) = f(x - y).$$
Par conséquent, $x - y \in \mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$. Donc $x - y = 0_E$ i.e. $x = y$. On en déduit donc bien que f est injective.
2. Une application f est surjective si et seulement si tout élément de F admet (au moins) un antécédent, autrement dit si et seulement si tout élément de F est dans $\mathrm{Im}\,(f)$. Or on a toujours $\mathrm{Im}\,(f) \subseteq F$. Donc f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) = F$.

□

Remarque 11 : Le premier point est une propriété utile des applications linéaires alors que le second point de la proposition est général à toute application.

Remarque 12 :

1. La fonction $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est injective si et seulement si $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 0$.
2. Si F est de dimension finie. La fonction $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est surjective si et seulement si $\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(F)$.

Exemple 13 : Dans les applications suivantes, déterminer si f est injective et/ou surjective.

1. $\varphi : \begin{cases} \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{cases}$
2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y - z, x - y + z) \end{cases}$
3. Pour $a \in \mathbb{R}$, $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(a) \end{cases}$

Définition II.2

- Une application linéaire bijective est appelé un **isomorphisme**.
- Un endomorphisme bijectif est appelé un **automorphisme**.
- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$.
- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit que E et F sont **isomorphes** si et seulement s'il existe $f \in \mathscr{L}(E, F)$ un isomorphisme de E dans F.

Exemple 14 :

1. Montrer que E est toujours isomorphe à lui même.
2. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est isomorphe à $\mathbb{R}^3$.

Proposition II.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ des automorphismes de E muni de la loi de composition $\circ$ est un groupe, appelé **groupe linéaire** de E. Autrement dit :

1. $\mathrm{GL}(E)$ est stable par composition : pour tout $(f, g) \in \mathrm{GL}(E)^2$, $f \circ g \in \mathrm{GL}(E)$.
2. Tout élément de $\mathrm{GL}(E)$ admet un inverse dans $\mathrm{GL}(E)$: pour tout $f \in \mathrm{GL}(E)$, on a $f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$.
3. Plus généralement, pour tout $f \in \mathrm{GL}(E)$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, f^k existe et $f^k \in \mathrm{GL}(E)$.

Démonstration.

1. Soit $(f, g) \in \mathrm{GL}(E)^2$. Puisque l'ensemble de départ de f est l'ensemble d'arrivée de g, $f \circ g$ est bien définie. De plus on a déjà vu que la composition de deux applications linéaires reste une application linéaire. Donc $f \circ g$ est un endomorphisme de E. Puisque f et g sont bijectives, on en déduit également (propriété générale sur les fonctions bijectives) que $f \circ g$ est bijective. Conclusion $f \circ g \in \mathrm{GL}(E)$.
2. Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$. Puisque $f : E \to E$ est bijective, on en déduit que $f^{-1} : E \to E$ existe et est bijective. Montrons que f^{-1} est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in E^2$. On pose $x' = f^{-1}(x)$ et $y' = f^{-1}(y)$ et donc $x = f(x')$ et $y = f(y')$. Ainsi

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda x + \mu y) = f^{-1}(\lambda f(x') + \mu f(y')) &= f^{-1}(f(\lambda x' + \mu y')) && \text{car } f \text{ est linéaire.} \\ &= \lambda x' + \mu y' \\ &= \lambda f^{-1}(x) + \mu f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Par conséquent f^{-1} est linéaire. D'où $f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$.

□

II.2 Famille de vecteurs et applications linéaires

Proposition II.4

Soient E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. Alors

$$f(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)) = \text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n)).$$

En particulier si $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice dans E alors,

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n)).$$

Démonstration. Montrons que $f(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)) \subseteq \text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n))$. Soit $y \in f(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n))$. Par définition, il existe $x \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ tel que $y = f(x)$. Par suite, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, u_k.$$

Ainsi,

$$y = f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, f(x_k) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire.}$$

D'où $y \in \text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n))$ et par conséquent, on a bien démontré que

$$f(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)) \subseteq \text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n)).$$

Montrons maintenant l'inclusion réciproque :

$$\text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n)) \subseteq f(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)).$$

Soit $y \in \text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n))$. Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, f(u_k) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, u_k\right).$$

Or $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, u_k \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ et donc

$$y = \underbrace{f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, u_k\right)}_{\in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)} \in f(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)).$$

Par conséquent, $\text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n)) \subseteq f(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n))$.
Conclusion, on a bien montré que $f(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)) = \text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n))$.
En particulier, si $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice dans E alors

$$\text{Im}(f) = f(E) = f(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)) = \text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n)).$$

$\square$

Exemple 15 : Dans chacun des cas, déterminer l'image de l'application.

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (2x + y, 3x - y, x + y) \end{array} \right.$
2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$

Proposition II.5

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille finie de vecteurs ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Si f est injective et $\mathscr{F}$ est libre alors $f(\mathscr{F}) = (f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre.
2. Si f est surjective et $\mathscr{F}$ est génératrice dans E, alors $f(\mathscr{F}) = (f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est génératrice dans F.
3. Si f est un isomorphisme et si $\mathscr{F}$ est une base de E, alors $f(\mathscr{F}) = (f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est une base de F.

Démonstration.

1. Si f est injective et $\mathscr{F}$ est libre. Montrons que $\mathscr{F}' = f(\mathscr{F}) = (f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(u_k) = 0_F.$$
Par linéarité de f, on en déduit que
$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\right) = 0_F.$$
Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \in \operatorname{Ker}(f)$. Or f est injective donc $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$. Ainsi,
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E.$$
Or $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ est libre et donc pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $\lambda_i = 0$ ce qui démontre bien que $\mathscr{F}' = f(\mathscr{F}) = (f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre.
2. Si f est surjective et si $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice dans E, alors par la proposition précédente,
$$\operatorname{Vect}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \operatorname{Im}(f).$$
Or f est surjective. Donc $\operatorname{Im}(f) = F$ et donc
$$\operatorname{Vect}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = F$$
i.e. $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est génératrice dans F.
3. Si $\mathscr{F}$ est une base de E, elle est libre et génératrice. Or f est bijective donc injective et surjective et donc d'après les deux points précédents, $\mathscr{F}' = (f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre et génératrice dans F. Autrement dit $\mathscr{F}'$ est une base de F.

□

Proposition II.6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E (qui est donc de dimension $n \in \mathbb{N}^*$).

1. L'application f est injective si et seulement si $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F.
2. L'application f est surjective si et seulement si $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice dans F.
3. L'application f est un isomorphisme si et seulement si $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.

Démonstration.

1. Si f est injective alors comme $\mathscr{B}$ est libre, par la proposition précédente, $f(\mathscr{B})$ est libre également. Montrons donc la réciproque. Supposons que $f(\mathscr{B})$ est libre et montrons que f est injective. On utilise naturellement la caractérisation par le noyau. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Notamment $x \in E$. Or $\mathscr{B}$ est une base de E, donc il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ (coordonnées de x dans $\mathscr{B}$) tel que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Par linéarité de f, on obtient que
$$0_F = f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k).$$
Or la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre par hypothèse. Donc $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0_{\mathbb{K}}$. Ainsi, $x = 0_E$. On a donc montré que $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$ et donc l'application f est injective.

2. Si f est surjective alors comme $\mathscr{B}$ est génératrice dans E, par la proposition précédente, $f(\mathscr{B})$ est génératrice dans F. Montrons la réciproque. Réciproquement, si $f(\mathscr{B})$ est génératrice dans F,

$$F = \text{Vect}\left(f\left(\mathscr{B}\right)\right) = \text{Vect}\left(f\left(e_1\right), \ldots, f\left(e_n\right)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prop II.4}}}{=} f\left(\text{Vect}\left(e_1, \ldots, e_n\right)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathscr{B}\text{ génératrice}}}{=} f(E) = \text{Im}(f),$$

ce qui montre bien que f est surjective.

3. Le troisième point découle des deux précédents.

$\square$

Proposition II.7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une famille quelconque de n vecteurs de F. Alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $f(\mathscr{B}) = \mathscr{F}$ i.e. telle que

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \qquad f(e_i) = f_i.$$

Autrement dit une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Démonstration. *Existence.* Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ avec $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$, on définit

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i.$$

Puisque $\mathscr{B}$ est génératrice, f est bien définie sur E tout entier et puisque $\mathscr{B}$ est libre, on a l'unicité de la décomposition et donc $f(x)$ est bien définie de manière unique. De plus, il est clair que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $f(e_i) = f_i$. Montrons que f est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in E^2$. On note $(x_1, \ldots, x_n)$ respectivement $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées de x respectivement de y dans la base $\mathscr{B}$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

Par combinaison linéaire on obtient

$$z = \lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) e_i.$$

Par unicité des coordonnées, on en déduit que les coordonnées de z dans la base $\mathscr{B}$ sont $(\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda_n x_n + \mu_n y_n)$. Donc par définition de f,

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) f_i.$$

Ainsi,

$$f(z) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i f_i + \mu \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

ce qui démontre bien que f est linéaire : $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Unicité. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F telles que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $f(e_i) = g(e_i) = f_i$. Alors pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a

$$\begin{aligned}
f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i g(e_i) \\
&= g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) && \text{car } g \text{ est linéaire} \\
&= g(x).
\end{aligned}$$

On a donc bien $f = g$ ce qui démontre l'unicité. $\square$

Proposition II.8

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E : $E_1 \oplus E_2 = E$. Soient $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$ deux applications linéaires. Alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$.
Autrement dit une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions sur des sous-espaces supplémentaires.

Démonstration. Attention, il n'est pas question ici de dimension, on ignore si E ou F est de dimension finie ou non.
Existence. Pour tout $x \in E = E_1 \oplus E_2$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. On définit alors
$$f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2).$$
On note que $f(x)$ est bien définie car f_1 est définie sur E_1 et $x_1 \in E_1$ et de même $x_2 \in E_2$ et f_2 et bien définie sur E_2. De plus l'unicité de la décomposition assure que $f(x)$ est bien définie de manière unique. Donc f est bien définie sur E tout entier. De plus pour tout $x \in E_1$, sa décomposition dans $E_1 \oplus E_2$ étant $x = x + 0_E$, on a facilement que $f(x) = f_1(x) + f_2(0_E) = f_1(x) + 0_F = f_1(x)$ car f_2 est linéaire. Donc $f_{|E_1} = f_1$. De même on vérifie bien que $f_{|E_2} = f_2$.
Montrons que f est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x,y) \in E^2$. Puisque $E = E_1 \oplus E_2$, il existe $(x_1, y_1) \in E_1^2$ et $(x_2, y_2) \in E_2^2$ tels que $x = x_1 + y_1$ et $y = y_1 + y_2$. Alors par définition de f,
$$f(x) = f_1(x_1) + f(x_2) \qquad \text{et} \qquad f(y) = f_1(y_1) + f_2(y_2).$$
Posons $z = \lambda x + \mu y$. Alors la décomposition de z dans $E_1 \oplus E_2$ est donnée par
$$z = \underbrace{\lambda x_1 + \mu y_1}_{\in E_1} + \underbrace{\lambda x_2 + \mu y_2}_{\in E_2}.$$
Donc,
$$\begin{aligned}
f(z) &= f_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + f_2(\lambda x_2 + \mu y_2) && \text{par définition de } f \\
&= \lambda f_1(x_1) + \mu f_1(y_1) + \lambda f_2(x_2) + \mu f_2(y_2) && \text{car } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont linéaires} \\
&= \lambda \underbrace{(f_1(x_1) + f_1(y_1))}_{=f(x)} + \mu \underbrace{(f_2(x_2) + f_2(y_2))}_{=f(y)}.
\end{aligned}$$
Ainsi, il vient que
$$f(\lambda x + \mu y) = f(z) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$
Donc f est bien linéaire.
Unicité. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F telles que $f_{|E_1} = g_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = g_{|E_2} = f_2$. Montrons que $f = g$. Soit $x \in E$. Il existe $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Donc par linéarité
$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2) = g(x_1) + g(x_2) = g(x_1 + x_2) = g(x)$$
et ainsi $f = g$. $\square$

II.3 Espaces isomorphes

Lemme II.9

Si E est un espace vectoriel de dimension infinie, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $\mathscr{L}$ une famille libre de E de cardinal p.

Démonstration. On pose
$$\aleph = \{ \mathrm{Card}(\mathscr{L}) \in \mathbb{N} \mid \mathscr{L} \text{ est une famille libre de } E \}.$$

Puisque E est de dimension infinie, $E \neq \{0\}$ et donc E admet des familles libres (tout singleton de vecteur non nul de E par exemple). Donc $\aleph$ est non vide. Supposons $\aleph$ majorée. Comme $\aleph$ est une partie de $\mathbb{N}$, il admet alors un maximum, notons-le $m = \max(\aleph)$. Un maximum étant atteint, il existe $\mathscr{L}_m$ une famille libre de E de cardinal m. Puisque E est de dimension infinie et que $\mathscr{L}_m$ de cardinal fini, on sait que $\mathscr{L}_m$ n'engendre pas E. Donc il existe $x \in E$ tel que $x \notin \text{Vect}(\mathscr{L}_m)$. Dès lors, la famille $\mathscr{L}_m \cup \{x\}$ est libre. Or elle est de cardinal $m+1 > \max(\aleph)$ ce qui est absurde. Donc $\aleph$ n'est pas majorée. Donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on peut construire une famille libre de cardinal plus grand que p. Soit $\mathscr{L}_q$ une telle famille avec $q \geqslant p$ son cardinal. Comme une sous-famille d'une famille libre est toujours libre, quitte à enlever $q-p$ vecteurs de $\mathscr{L}_q$, on peut construire une famille $\mathscr{L}_p$ de E de cardinal p qui soit toujours libre. □

Proposition II.10

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Si f est injective alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.
2. Si f est surjective alors $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.
3. Si f est un isomorphisme alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration.

1. Supposons f injective. Si F est de dimension infinie alors le point 1 n'énonce rien. Supposons donc F de dimension finie et posons $p = \dim(F) \in \mathbb{N}$. Supposons que E est de dimension infinie. Alors d'après le lemme précédent, E admet (au moins) une famille libre $\mathscr{L}$ de cardinal égal à $p+1$. Puisque f est injective alors par la proposition II.6, $f(\mathscr{L})$ est une famille libre de F mais possédant $p+1 > \dim(F)$ vecteurs ce qui est absurde. Donc E est de dimension finie. Notons $n = \dim(E)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E qui est donc de cardinal n. Puisque $\mathscr{B}$ est libre et f injective, toujours par la proposition II.6, $f(\mathscr{B})$ est libre dans F. Donc
$$\dim(E) = n = \text{Card}(\mathscr{B}) = \text{Card}(f(\mathscr{B})) \leqslant p = \dim(F).$$
2. Supposons maintenant f surjective. Si E est de dimension infinie alors le point 2 n'énonce rien. Supposons donc E de dimension finie et notons $n = \dim(E)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, alors $\text{Card}(\mathscr{B}) = n$. De plus $\mathscr{B}$ est génératrice dans E et f est surjective, donc d'après la proposition II.6, $f(\mathscr{B})$ est génératrice dans F. Donc F est de dimension finie et plus précisément,
$$\dim(E) = n = \text{Card}(\mathscr{B}) = \text{Card}(f(\mathscr{B})) \geqslant p = \dim(F).$$
3. Le point 3 découle des deux points précédents.

□

Proposition II.11

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Les espaces E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration. Si E et F sont isomorphes, on a déjà vu dans la proposition II.10 qu'alors $\dim(E) = \dim(F)$. Réciproquement si $\dim(E) = \dim(F) = n \in \mathbb{N}$, montrons l'existence d'un isomorphisme entre E et F. Si $n = 0$, le résultat est évident. Supposons $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{B}_F = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Par la propriété précédente, il existe une (unique) application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $f(e_i) = f_i$. L'image d'une base par f est une base donc par le point 3 de la proposition II.6, on en déduit que f est bijective ce qui conclut la démonstration.
□

Théorème II.12 (Classification des espaces vectoriels de dimension finie)

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. C'est un corollaire direct du résultat précédent.
□

Application : démonstration de la caractérisation des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
Soit $(b,c) \in \mathbb{R}^2$, avec $c \neq 0$. On considère l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \right\}$$

On suppose ici que $\Delta = b^2 - 4c > 0$ et on pose $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
3. En déduire la dimension de E.
4. Montrer que $\left((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une base de E.

III Théorème du rang

Définition III.1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose E de dimension finie. On appelle **rang** de l'application linéaire f, noté $\mathrm{rg}(f)$ la dimension de l'image de f :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Remarque 16 :

1. Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors
$$\mathrm{rg}(f) = \dim(f(\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n))) = \dim(\mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n))) = \mathrm{rg}(f(e_1),\dots,f(e_n)).$$
2. Si F est de dimension finie, une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est surjective si et seulement si
$$\mathrm{Im}(f) = F \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{rg}(f) = \dim(F).$$

Exemple 17 : Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_4[X] & \to & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \mapsto & X^2\left(P(X+1) - P(X-1) - 2P'(X)\right). \end{array} \right.$$

Vérifier que f est linéaire et déterminer son rang.

Remarque 18 : Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ deux applications linéaires.

1. $\mathrm{rg}(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$.
2. $\mathrm{rg}(g\circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))$.
3. Si g est un isomorphisme (en fait injective suffit) alors $\mathrm{rg}(g\circ f) = \mathrm{rg}(f)$.
4. Si f est un isomorphisme (en fait surjective suffit) alors $\mathrm{rg}(g\circ f) = \mathrm{rg}(g)$.

Démonstration.

1. Soient $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Alors $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n))) \leqslant n$. De plus $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(F)$. Conclusion,
$$\mathrm{rg}(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F)).$$
2. Soit $p = \mathrm{rg}(f)$. Alors $p = \dim(\mathrm{Im}(f))$. Posons $(f_1,\dots,f_p)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$.
$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(g\circ f) = \dim(g\circ f(E)) = \dim(g(f(E))) &= \dim(g(\mathrm{Im}(f))) \\ &= \dim(g(\mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_p))) \\ &= \dim(\mathrm{Vect}(g(f_1),\dots,g(f_p))) \leqslant p = \mathrm{rg}(f). \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$, on a

$$\mathrm{Im}(g \circ f) = g \circ f(E) = g(f(E)) = g(\mathrm{Im}(f)) \subseteq g(F) = \mathrm{Im}(g).$$

Ainsi,

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(g)$$

et donc

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f)).$$

3. Supposons g injective. Soient $p = \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$ et $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. Puisque g est injective et que $\mathscr{F}$ est libre, $g(\mathscr{F}) = (g(f_1), \ldots, g(f_p))$ est aussi une famille libre de G. Montrons qu'elle est incluse dans $\mathrm{Im}(g \circ f)$. Soit $i \in [\![1;p]\!]$. On a $f_i \in \mathrm{Im}(f)$. Donc il existe $e_i \in E$ tel que $f_i = f(e_i)$. Donc $g(f_i) = g \circ f(e_i) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. Ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1;p]\!]$ on en déduit bien que $g(\mathscr{F})$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f \circ g)$. Ainsi $\mathrm{rg}(g \circ f) = \dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) \geqslant \mathrm{Card}(g(\mathscr{F})) = p = \mathrm{rg}(f)$. Or par le point précédent, on sait déjà que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f)$. Conclusion

$$\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f).$$

4. On suppose maintenant que f est surjective alors, $\mathrm{Im}(f) = F$. Donc

$$\mathrm{rg}(g \circ f) = \dim(g(f(E))) = \dim(g(\mathrm{Im}(f))) = \dim(g(F)) = \mathrm{rg}(g).$$

□

Théorème III.2 (Théorème du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie. Alors

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E).$$

Démonstration. Soient $n = \dim(E)$. Puisque $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension finie. Notons $p = \dim(\mathrm{Ker}(f))$.
Premier cas. Si $n = p = 0$, alors $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} = E$ et donc directement E n'ayant qu'un seul élément $\mathrm{Im}(f) = \{f(0_E)\} = \{0_F\}$. Donc $\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0 + 0 = \dim(E)$.
Deuxième cas. Si $n \neq 0$ et $p = 0$. Puisque E est non nul de dimension finie, il admet une base $\mathscr{B}$. Puisque $p = 0$, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et donc f est injective. Donc $f(\mathscr{B})$ est libre et de plus cette famille engendre $\mathrm{Im}(f)$. Donc $f(\mathscr{B})$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Dans ce cas,

$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + 0 = \mathrm{Card}(f(\mathscr{B})) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \dim(E).$$

Troisième cas. Si $p \neq 0$ (alors comme $\mathrm{Ker}(f) \subseteq E$, $p \leqslant n$ et donc $n \neq 0$) et $n - p = 0$. Alors, $n = p$ et donc $\mathrm{Ker}(f) = E$. Donc f est l'application nulle et donc $\mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$. Ainsi,

$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0 + p = n = \dim(E).$$

Dernier cas. Supposons que $n > p > 0$. Puisque $p > 0$, $\mathrm{Ker}(f)$ admet une base. Soit $\mathscr{B}_K = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Puisque E est de dimension finie, $\mathrm{Ker}(f)$ admet un supplémentaire dans E. Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$. Alors, on a $\dim(G) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - p > 0$. Soit $\mathscr{B}_G = (e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de G. Par le théorème de la base adaptée, $\mathscr{B} = \mathscr{B}_K \cup \mathscr{B}_G$ est une base de E. On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_p), f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)) \\ &= \mathrm{Vect}(0_F, \ldots, 0_F, f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)) && \text{car pour tout } i \in [\![1;p]\!],\ e_i \in \mathrm{Ker}(f) \\ &= \mathrm{Vect}(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)). \end{aligned}$$

Montrons que $f(\mathscr{B}_G) = (f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est libre. Soit $(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p}$ tel que

$$\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F.$$

Par linéarité,

$$f\left(\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}(f).$$

Notons $x = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i\, e_i$. On a donc $x \in \operatorname{Ker}(f)$. D'autre part, $x \in \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) = G$. Donc $x \in \operatorname{Ker}(f) \cap G$. Or $\operatorname{Ker}(f)$ et G sont en somme directe. Donc $\operatorname{Ker}(f) \cap G = \{0_E\}$ et $x = 0_E$. Par suite,

$$\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i\, e_i = 0_E.$$

Or $\mathscr{B}_G$ est libre donc $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$. On obtient donc que $f(\mathscr{B}_G)$ est libre. De plus, elle engendre $\operatorname{Im}(f)$ et constitue donc une base de $\operatorname{Im}(f)$. Par conséquent,

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{Card}(f(\mathscr{B}_G)) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_G) = n - p.$$

Finalement, on obtient bien que

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = n - p = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(f)).$$

□

Remarque 19 :

1. La dimension de l'espace F n'intervient pas dans le théorème du rang. En particulier, F peut même être de dimension infinie.
2. Grâce au théorème du rang, on note que, lorsque E est de dimension finie,

$$f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\} \quad \Leftrightarrow \quad \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rg}(f) = \dim(E).$$

Exemple 20 : Déterminer le rang de

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & (2X+2)\,P - \left(X^2 - 1\right) P'. \end{array} \right.$$

Exemple 21 : Redémontrer la proposition II.10 à l'aide du théorème du rang et en supposant E de dimension finie.

Proposition III.3

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et S UN supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f)$ dans E. Alors $\tilde{f}$ la restriction de f à $\tilde{E} = S$ dans $\tilde{F} = \operatorname{Im}(f)$ est un isomorphisme : $\tilde{f} \in \mathscr{L}\left(\tilde{E}, \tilde{F}\right)$.

Démonstration. Par la proposition I.3, $f_{|_S} : S \to F$ est bien linéaire. De plus pour tout $x \in S$, $f_{|_S}(x) = f(x) \in \operatorname{Im}(f)$. Donc il est possible également de restreindre l'espace d'arrivée à $\tilde{F} = \operatorname{Im}(f)$. Donc $\tilde{f}$ est bien définie et reste linéaire : $\tilde{f} \in \mathscr{L}\left(\tilde{E}, \tilde{F}\right)$.
Montrons que $\tilde{f}$ est bijective. Montrons que $\tilde{f}$ est injective. Soit $x \in \operatorname{Ker}\left(\tilde{f}\right)$, en particulier par définition de $\tilde{f}$, $x \in \tilde{E} = S$. De plus par définition du noyau, $0 = \tilde{f}(x) = f(x)$. Donc $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Ainsi, $x \in S \cap \operatorname{Ker}(f)$. Or S et $\operatorname{Ker}(f)$ sont en somme directe et donc $S \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$. Ainsi, $x = 0_{\tilde{E}}$. Donc $\tilde{f}$ est injective.
Montrons que $\tilde{f}$ est surjective. Soit $y \in \tilde{F} = \operatorname{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a $x \in E$ et on sait que $E = S + \operatorname{Ker}(f)$. Donc il existe $(x_1, x_2) \in S \times \operatorname{Ker}(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$. Dès lors, $y = f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1) + 0_F$ car $x_2 \in \operatorname{Ker}(f)$. Ainsi,

$$y = f(x_1) = \tilde{f}(x_1) \qquad \text{car } x_1 \in S.$$

Donc $y \in \operatorname{Im}\left(\tilde{f}\right)$ et on en déduit que $\tilde{f}$ est surjective.
Conclusion, $\tilde{f}$ est bijective et est donc un isomorphisme.

□

Remarque 22 : Cette proposition permet de redémontrer le théorème du rang : puisque $\tilde{f}$ est un isomorphisme, S et $\operatorname{Im}(f)$ sont isomorphes et donc $\dim(S) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{rg}(f)$. Or S et $\operatorname{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E donc

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(S) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(f)).$$

Théorème III.4 Caractérisation des isomorphismes

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Si au moins deux des assertions parmi les trois suivantes sont vérifiées

1. $\dim(E) = \dim(F)$
2. f est injective
3. f est surjective

alors f est un isomorphisme de E dans F.

Démonstration.

- Supposons les points 1 et 2. Alors par le point 2, $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ et donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$. Par le théorème du rang, $\text{rg}(f) = \dim(E)$ et donc par le point 1, $\text{rg}(f) = \dim(F)$ et donc $\text{Im}(f) = F$ et f est surjective. Ainsi f est injective et surjective et est donc bijective.
- Supposons les points 1 et 3. Par le point 3, $\text{rg}(f) = \dim(F)$ et par le point 1, $\text{rg}(f) = \dim(E)$. Donc par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$ i.e. $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ ou encore f est injective. Or on a déjà supposé f surjective, donc f est bijective.

□

Remarque 23 : Si E et F sont de dimension finie et tels que $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors la proposition précédente peut se reformuler de la façon suivante : on a les équivalences suivantes

$$f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est surjective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est un isomorphisme.}$$

Remarque 24 : Si E et F sont de dimension finie et tels que $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On peut aussi remplacer l'injectivité ou la surjectivité par l'existence d'un inverse à gauche ou à droite :

$$\exists g \in \mathscr{L}(F,E)\ \ g \circ f = \text{Id}_E \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in \mathscr{L}(F,E)\ \ f \circ g = \text{Id}_F \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est un isomorphisme.}$$

Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

Exemple 25 : Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ (a,b,c) & \to & (a+b)X^2 + (b+c)X + (a+b+c). \end{cases}$$

Proposition III.5

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$. On considère l'équation linéaire d'inconnu un vecteur x suivante :

$$f(x) = b \qquad (E)$$

On note $\mathcal{S} = \{x \in E \mid f(x) = b\}$ l'ensemble des solutions de (E).

1. Si $b \notin \text{Im}(f)$, alors $\mathcal{S} = \emptyset$.
2. Si $b \in \text{Im}(f)$, alors $\mathcal{S} \neq \emptyset$ et admet au moins une solution $x_0 \in \mathcal{S}$. Dans ce cas, l'ensemble de toutes les solutions est donné par

$$\mathcal{S} = x_0 + \text{Ker}(f) = \{x_0 + x \in E \mid x \in \text{Ker}(f)\} = \{u \in E \mid u - x_0 \in \text{Ker}(f)\}.$$

Démonstration. Si $b \in \text{Im}(f)$, par définition de l'image, il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = b$ et donc $x_0 \in \mathcal{S}$ est une solution de (E). Montrons que $\mathcal{S} = \{u \in E \mid u - x_0 \in \text{Ker}(f)\}$. Soit $u \in \mathcal{S}$. Alors $f(u) = b = f(x_0)$. Donc par linéarité de f, $f(u - x_0) = f(x) - f(x_0) = b - b = 0_F$. Donc $u - x_0 \in \text{Ker}(f)$.
Réciproquement soit $u \in E$ tel que $u - x_0 \in \text{Ker}(f)$. Alors par linéarité de f,

$$f(u) = f(x_0 + u - x_0) = f(\underbrace{x_0}_{\in \mathcal{S}}) + f(\underbrace{u - x_0}_{\in \text{Ker}(f)}) = b + 0_F = b.$$

Donc $u \in \mathcal{S}$. Conclusion,

$$\mathcal{S} = \{u \in E \mid u - x_0 \in \text{Ker}(f)\}.$$

□

Remarque 26 :

- On dit dans ce cas que $\mathcal{S}$ est un espace affine de direction vectorielle $\operatorname{Ker}(f)$.
- Nous avons déjà croisé cette situation lors de la résolution d'équations différentielles linéaires avec second membre ou lors de résolution d'un système d'équations linéaires avec second membre.

Exemple 27 : Si $\mathcal{S}$ est l'ensemble des éléments de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $2x + 3y = 1$. On pose

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2x + 3y \end{array} \right. .$$

On a alors

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 1 \right\}.$$

On note que $\mathcal{S}$ n'est pas vide car $x_0 = (1, -1)$ par exemple est une solution. On a alors

$$\mathcal{S} = x_0 + \operatorname{Ker}(f).$$

Or

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0 \right\} &= \left\{ \left(-\frac{3}{2}y, y \right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \tilde{y}(3\tilde{y}, -2\tilde{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \tilde{y} = -2y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}((3, -2)). \end{aligned}$$

Ainsi,

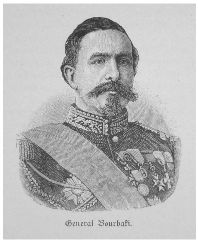
$$\mathcal{S} = (1, -1) + \operatorname{Vect}((3, -2)) = \left\{ (-1 + 3t, 1 - 2t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

C'est donc une droite affine dans $\mathbb{R}^2$, dont on a donné l'équation paramétrique.

Nicolas BOURBAKI *(Besse-en-Chandesse (Auvergne) 1935 -) est un mathématicien français (ou Poldève selon certaines sources) n'ayant... jamais existé ! Après la Première Guerre Mondiale, la nouvelle génération de mathématiciens n'a pas beaucoup de prédécesseurs directs. En 1934, Henri CARTAN et André WEIL déplorent le manque d'ouvrage solide et moderne pour leur enseignement à l'Université de Strasbourg et décident avec une dizaine d'autres mathématiciens, presque tous issus de l'Ecole Normale Supérieure, d'écrire un traité d'analyse le plus complet possible. Ils se retrouvent alors régulièrement dans un restaurant parisien et étendent leurs ambitions à l'algèbre et la géométrie. En juillet 1935, un groupe est constitué à Besse-en-Chandesse. Les mathématicien R. De Possel, S. Mandelbrojt, J. Dieudonné et C. Chevalley sont présent à ce premier congrès. Le groupe décide d'écrire un ouvrage d'environ deux mille pages sur les structures fondamentales et l'étude de l'analyse. Afin qu'aucun membre du groupe ne soit mis en avant il est décidé que chaque texte devra être relue par l'ensemble du groupe et les publications seront rendue anonyme par l'utilisation d'un unique pseudonyme Nicolas Bourbaki.*

Photo prise en Juillet 1935.
De gauche à droite, debout :
H. Cartan - R. De Possel - J. Dieudonné - A. Weil
assis : Mirles - C. Chevalley - S. Mandelbrojt

La composition du groupe n'est pas figée et se renouvellera des décennies durant mais aucun membre ne devra avoir plus de cinquante ans. Au fil des ans, le groupe comptera plusieurs mathématiciens célèbres et notamment cinq médailles Fields (L. Schwartz, JP Serre, A. Grothendieck, A. Connes, JC Yoccoz) même si ses publications se feront de plus en plus rares.
Dans son traité « Eléments de mathématiques », Bourbaki refonde totalement les mathématiques et obtient de nouveaux résultats. Il aura une très forte influence sur l'école française. On lui doit notamment la vulgarisation en France des symboles $\forall$, $\exists$, $\emptyset$, l'utilisation des symboles $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ et des termes « injectif, surjectif, factoriel ». Cependant, d'un niveau soutenu, le traité obtenu est finalement peu utilisable par des étudiants en licence d'autant que les référencements très nombreux lors des démonstrations à d'autres théorèmes d'autres sections mettent en exergue les liens entre les différentes notions mais compliquent la lecture.



Le nom Bourbaki proviendrait d'un canular que fit un élève de l'Ecole Normale Supérieure en y donnant une fausse conférence sous l'identité inventée d'Holmgren, mathématicien suédois. Conférence volontairement incompréhensible où il aurait cité le théorème de Bourbaki. Il aurait emprunté ce nom au général français Charles Bourbaki, sous lequel avaient servi des normaliens durant la guerre de 1870.

Comment faire rentrer un éléphant dans un frigo ?

1. *Pour un arithméticien : mettez un bout de l'éléphant dans le frigo (la trompe par exemple). On peut toujours en mettre un peu plus dans un frigo. Par récurrence, on démontre que l'on peut mettre tout l'éléphant dans le frigo (et même un nombre d'éléphants aussi grand que voulu !).*
2. *Pour un topologue : mettez l'éléphant à côté du frigo. Définissez l'intérieur du frigo comme étant l'espace autour du frigo.*
3. *Pour un analyste : videz votre frigo. Dérivez l'éléphant. L'éléphant étant constant (il a défense de bouger et un éléphant ça ne trompe pas...) sa dérivée est nulle. Or le frigo ne contient rien ce qui est nul naturellement (personne n'aime les frigos vides). Donc la dérivée de l'éléphant est dans le frigo. Intégrez-le, il se trouve alors dans le frigo. L'intégration d'un éléphant dérivant dans un espace frigorifique est laissé en exercice.*
4. *Pour un ingénieur numérique : mettez un bout de l'éléphant dans le frigo : sa trompe par exemple. C'est suffisant en pratique.*
5. *Pour un statisticien :* 99 *des* 100 *éléphants interrogés dans le frigo affirment y être rentrés. Le résultat est donc correct. Le dernier éléphant n'a pas compris la question et n'est donc pas représentatif dans notre étude.*
6. *Bourbaki affirme que c'est un corollaire du théorème 12.III.b qui traite le cas d'une poule et l'utilisation subtile du lemme A.2.6 qui permet la mise en place de l'isomorphisme évident entre une poule et un éléphant.*
7. *Pour un algébriste linéaire : faites tenir l'éléphant en équilibre sur sa trompe. La trompe est alors une base pour l'ensemble éléphant. Montrez que la trompe rentre dans le frigo puis que le frigo est stable par combinaisons linéaires. L'éléphant est alors un sous-espace du frigo.*