Chapitre IV : Les Nombres Complexes

I L'ensemble des nombres complexes

I.1 Construction de $\mathbb{C}$

La construction rigoureuse qui va suivre de l'ensemble des nombres complexes me semble importante pour votre culture mais est hors programme. Posez donc vos stylos et ouvrez vos oreilles.
On munit $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire l'ensemble des couples de réels $\mathbb{R}^2 = \{(a,b)\,,\, a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$ des opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ définies par

$$\begin{aligned}
&\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a',b') \in \mathbb{R}^2, \qquad (a,b) +_{\mathbb{C}} (a',b') = (a+a', b+b')\\
&\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a',b') \in \mathbb{R}^2, \qquad (a,b) \times_{\mathbb{C}} (a',b') = (aa'-bb', ab'+a'b)\,.
\end{aligned}$$

Notez que si l'opération $+_{\mathbb{C}}$ est naturelle, l'opération $\times_{\mathbb{C}}$ n'est pas la multiplication naturelle (aa', bb'). Pourtant ces deux opérations vérifient des propriétés très analogues à celle de l'addition des réels $+$ et celle de la multiplication des réels $\times$.

- Les opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ sont associatives. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a',b') \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a'',b'') \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{aligned}
[(a,b) +_{\mathbb{C}} (a',b')] +_{\mathbb{C}} (a'',b'') &= (a,b) +_{\mathbb{C}} [(a',b') +_{\mathbb{C}} (a'',b'')]\\
[(a,b) \times_{\mathbb{C}} (a',b')] \times_{\mathbb{C}} (a'',b'') &= (a,b) \times_{\mathbb{C}} [(a',b') \times_{\mathbb{C}} (a'',b'')]\,.
\end{aligned}$$
- Les opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ sont commutatives. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a',b') \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{aligned}
(a,b) +_{\mathbb{C}} (a',b') &= (a',b') +_{\mathbb{C}} (a,b)\\
(a,b) \times_{\mathbb{C}} (a',b') &= (a',b') \times_{\mathbb{C}} (a,b)\,.
\end{aligned}$$
- La loi $\times_{\mathbb{C}}$ est distributive sur la loi $+_{\mathbb{C}}$. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a',b') \in \mathbb{R}^2$,
$$(a,b) \times_{\mathbb{C}} [(a',b') +_{\mathbb{C}} (a'',b'')] = (a,b) \times_{\mathbb{C}} (a',b') +_{\mathbb{C}} (a,b) \times_{\mathbb{C}} (a'',b'')\,.$$
- Il existe un élément neutre pour la loi $+_{\mathbb{C}}$. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a,b) +_{\mathbb{C}} (0,0) = (0,0) +_{\mathbb{C}} (a,b) = (a,b)$.
- Il existe un élément neutre pour la loi $\times_{\mathbb{C}}$. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a,b) \times_{\mathbb{C}} (1,0) = (1,0) \times_{\mathbb{C}} (a,b) = (a,b)$.
- Tout élément admet un opposé pour la loi $+_{\mathbb{C}}$. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,
$$(a,b) +_{\mathbb{C}} (-a,-b) = (-a,-b) +_{\mathbb{C}} (a,b) = (0,0).$$
- Tout élément non nul (différent de $(0,0)$) admet un inverse pour la loi $\times_{\mathbb{C}}$. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,
$$(a,b) \times_{\mathbb{C}} \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \times_{\mathbb{C}} (a,b) = (1,0).$$

Lorsqu'un ensemble possède toutes ces bonnes propriétés, on dit que c'est un *corps*. On en déduit ici que $\left(\mathbb{R}^2, +_{\mathbb{C}}, \times_{\mathbb{C}}\right)$ est un corps. Bien entendu un autre exemple de corps que vous connaissez déjà est $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps. On sait également que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps. Pourtant $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et a fortiori $(\mathbb{N}, +, \times)$ ne sont pas des corps. Pourquoi ?

Exercice 1 : Soit $\mathbb{R}^2$, munit des opérations classiques $+_{\mathbb{R}^2}$ et $\times_{\mathbb{R}^2}$:

$$\begin{aligned}
&\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a',b') \in \mathbb{R}^2, \qquad (a,b) +_{\mathbb{R}^2} (a',b') = (a+a', b+b')\\
&\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a',b') \in \mathbb{R}^2, \qquad (a,b) \times_{\mathbb{R}^2} (a',b') = (aa', bb')\,.
\end{aligned}$$

Montrer que $\left(\mathbb{R}^2, +_{\mathbb{R}^2}, \times_{\mathbb{R}^2}\right)$ n'est pas un corps.
L'exercice précédent annonce bien que prendre une loi multiplicative $\times_{\mathbb{C}}$ plus tordue que la loi classique $\times_{\mathbb{R}^2}$ permet finalement d'obtenir un ensemble $\mathbb{C}$ dans lequel on trouve de meilleures propriétés que dans $\mathbb{R}^2$.

Définition I.1

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ est un corps appelé **le corps des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$.

I.2 Formulation plus pratique de $\mathbb{C}$

Inclusion de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Cette définition de $\mathbb{C}$ est élégante et rigoureuse mais peu pratique pour manipuler les nombres complexes. Dans les propriétés ci-dessus, nous nous apercevons que le couple $(0,0)$ a les mêmes propriétés que $0_{\mathbb{R}}$ et de même $(1,0)$ a les mêmes propriétés que $1_{\mathbb{R}}$. Si l'on va plus loin on s'aperçoit que l'ensemble $\mathbb{R}\times\{0\} = \{(a,0)\ ,\ a\in\mathbb{R}\}$ se comporte exactement comme $\mathbb{R}$. Plus précisément, l'application

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\times\{0\}\\ a &\mapsto (a,0)\end{aligned}$$

est une bijection qui est compatible avec les lois des ensembles, c'est-à-dire telle que $\forall\,(a,a')\in\mathbb{R}^2$, $\Phi\,(a+a') = \Phi(a) +_{\mathbb{C}} \Phi\,(a')$ et telle que $\forall\,(a,a')\in\mathbb{R}^2$, $\Phi\,(aa') = \Phi(a)\times_{\mathbb{C}}\Phi\,(a')$. A ce titre, on fait la confusion entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\times\{0\}$ et par abus (mais toléré et même bienvenu !) on dit que $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$ et on désignera alors tout élément complexe $(a,0)$ par le réel a, $(a,0)=a$.

« Faire des mathématiques, c'est donner le même nom à des choses différentes. »

Henri Poincaré

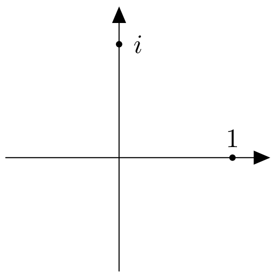
Définition de i. Continuons notre description de $\mathbb{C}$ et regardons maintenant la seconde coordonnée. Notamment le couple $(0,1)$. On voit que $(0,1)^2 = (0,1)\times_{\mathbb{C}}(0,1) = (0\times 0 - 1\times 1, 0\times 1 + 1\times 0) = (-1,0) = -(1,0) = -1$. En résumé, $(0,1)^2=-1$.

Définition I.2

Dans $\mathbb{C}$, on définit le complexe $i=(0,1)$.

Proposition I.3

Le complexe i vérifie $i^2=-1$ et n'est pas un nombre réel.



On peut maintenant donner une description plus agréable de $\mathbb{C}$ car tout complexe va pouvoir s'écrire en fonction de $1=(1,0)$ et de $i=(0,1)$. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$(a,b) = a\times_{\mathbb{C}}(1,0) +_{\mathbb{C}} b\times_{\mathbb{C}}(0,1) = a\times_{\mathbb{C}} 1 + b\times_{\mathbb{C}} i = a+ib.$$

Définition-Proposition I.4

Pout tout complexe $z\in\mathbb{C}$, il existe un unique couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, tel que $z=a+ib$.
Réciproquement pour tout couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a+ib\in\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \left\{\, z=a+ib \;\middle|\; (a,b)\in\mathbb{R}^2 \,\right\}.$$

Remarque 2 : Avec cette notation, les opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ non seulement étendent les opérations $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$ à un ensemble plus vaste $\mathbb{C}$ mais possèdent les mêmes propriétés agréables sur cet ensemble plus vaste $\mathbb{C}$ (associativité, commutativité, distributivité,...). En conséquence $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ s'écriront tout simplement $+$ et $\times$ (ou $\cdot$ ou sans signe).

Proposition I.5

Pour tout $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'\in\mathbb{C}$, avec $(a,b,a',b')\in\mathbb{R}^4$, on a

- $z+z' = a+a'+i\,(b+b')$
- $zz' = aa'-bb'+i\,(ab'+a'b)$.

Définition I.6

Pour tout complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

- Le réel a est appelé **la partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$.
- Le réel b est appelé **la partie imaginaire** de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.
- L'écriture $a + ib$ est unique et est appelée **la forme algébrique** ou **forme cartésienne** de z.

Exemple 3 : Calculer la forme algébrique des complexes $(1+i)^2(2-i) + (3+6i)(3-6i)$ et $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$.

Définition I.7

Un complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) = 0$ est dit **imaginaire pur.** L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Exemple 4 : Lesquels de ces complexes sont imaginaires purs : $1+i$, $3i$, $i\pi$, $i(2-i)$, i^3, i^6 ?

Proposition I.8

- Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z').$$

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\quad z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(z) = 0.$
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\quad z \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = 0.$

Remarque 5 : ATTENTION, il est absolument faux en général d'affirmer que la partie réelle d'un produit est le produit des parties réelles. De même pour la partie imaginaire. :

$$\mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z') \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(zz') \neq \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z')$$

I.3 Représentation graphique

On note $\mathscr{P}$ le plan euclidien usuel muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Proposition I.9

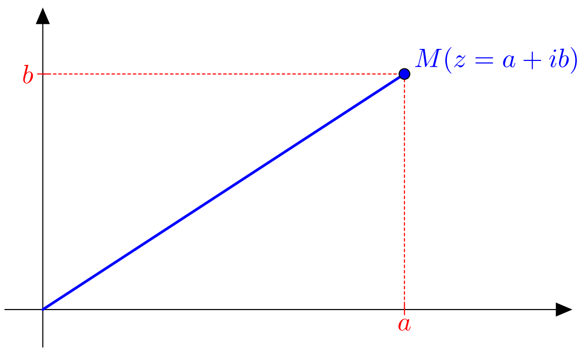
Il est possible d'identifier $\mathbb{C}$ à l'ensemble $\mathscr{P}$ de la façon suivante :

- A tout complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on associe le point $M \in \mathscr{P}$ de coordonnées $M(a; b)$.
- Réciproquement à tout point du plan $M(a; b) \in \mathscr{P}$, on associe le complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Cette identification est valide car l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \quad & \mathbb{C} \to \mathscr{P} \\ & z = a + ib \mapsto M(a; b) \end{aligned}$$

est bijective.



Définition I.10

Pour signifier que le point $M(a;b)$ est LE point associé au complexe z, on le note $M(z)$. Le complexe z est alors appelé **l'affixe** du point M. L'ensemble des points $M(z)$ avec $z \in \mathbb{C}$ est appelé **le plan complexe**.

Proposition I.11

L'ensemble $\mathbb{C}$ s'identifie également à l'ensemble des vecteurs du plan. Soit $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan $\mathscr{P}$ muni de sa base usuelle $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \quad & \mathbb{C} \to \overrightarrow{\mathscr{P}} \\ & z = a + ib \mapsto \overrightarrow{u}(a,b) \end{aligned}$$

est une bijection. On dit alors également que $z = a + ib$ est l'affixe de $\overrightarrow{u}(a,b)$.

Suite à ces deux identifications, voici quelques propriétés utiles,

Proposition I.12

- Soient A et B deux points du plan $\mathscr{P}$ d'affixe z_A et z_B respectivement, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- Soient A et B deux points du plan $\mathscr{P}$ d'affixe z_A et z_B respectivement, le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A+z_B}{2}$.
- Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ d'affixe z et z' respectivement. Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour affixe $z + z'$.
- Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ d'affixe z et λ un réel, le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ a pour affixe λz.

Démonstration. Montrons le premier point. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan. On sait que $\overrightarrow{AB}$ a alors pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$. Notons z_A l'affixe de A et z_B celle de B. On a alors $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$. Dès lors, $z_B - z_A = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = x_B - x_A + i(y_B - y_A)$ est bien l'affixe de $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$. □

Exemple 6 : Soient $A(2+4i)$, $B(1+2i)$ et $C(5-i)$ trois points du plan complexe. Déterminer l'affixe de D tel que $ABCD$ soient un parallélogramme puis l'affixe de I, l'intersection des diagonales AC et BD.

I.4 La conjugaison

Définition I.13

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** de z, noté $\overline{z}$, le complexe

$$\overline{z} = a - ib.$$

Proposition I.14

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$
4. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
5. $\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \overline{z^p} = \overline{z}^p$
6. $\overline{\overline{z}} = z$.

Démonstration. Exercice ! □

Application 7 : Pour déterminer la forme algébrique de l'inverse d'un complexe, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le complexe conjugué. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On a

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2+b^2}}_{=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)} + i \underbrace{\frac{-b}{a^2+b^2}}_{=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Remarque 8 : Cette pratique de multiplier la fraction par le conjugué du dénominateur permet systématiquement « d'éliminer » le complexe i du dénominateur.

Exemple 9 :

1. Calculer la forme algébrique de $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{\sqrt{3}+2i}$, $\frac{1-i}{-4-3i}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $i\,(z-3i) = 2z - 1 + i$.

Proposition I.15

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

On a de plus les caractérisations suivantes :

$$z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} = z \qquad \text{et} \qquad z \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} = -z.$$

Démonstration. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a $\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{a+ib+(a-ib)}{2} = \frac{2a}{2} = a = \mathrm{Re}(z)$ et de même $\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{a+ib-(a-ib)}{2i} = \frac{2ib}{2i} = b = \mathrm{Im}(z)$.
Pour les caractérisations : soit $z \in \mathbb{C}$. Par ce qui précède, on a les équivalences suivantes :

$$z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}\,(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z-\overline{z}}{2i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z - \overline{z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \overline{z}.$$

De même,

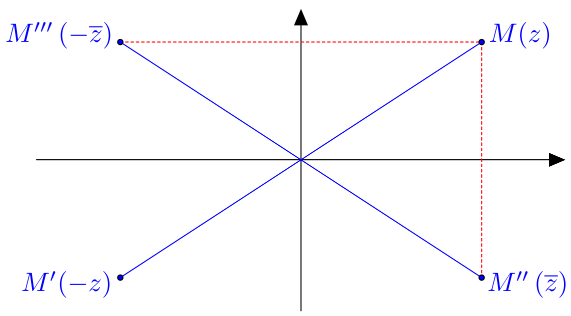
$$z \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z+\overline{z}}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} = -z.$$

□

Proposition I.16

Soient $M \in \mathscr{P}$ un point du plan et $z \in \mathbb{C}$ son affixe.

- Le point M' d'affixe $-z$ est l'image M par la symétrie centrale de centre $O(0)$.
- Le point M'' d'affixe $\overline{z}$ est l'image de M par la symétrie axiale d'axe celui des réels (Ox).
- Le point M''' d'affixe $-\overline{z}$ est l'image de M par la symétrie axiale d'axe celui des imaginaires purs (Oy).



II Forme trigonométrique

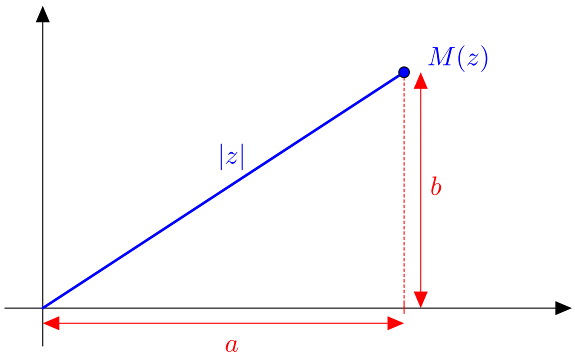
II.1 Module d'un nombre complexe

Définition II.1

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. **Le module** de z, noté $|z|$, est le réel positif défini par

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Par Pythagore, le module de z correspond à la distance du point $M(z)$ à l'origine.



Exemple 10 : Calculer le module de $5i$, $-1+\sqrt{3}i$, $2+2i$, -7.

Proposition II.2

Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, on a
$$|z|^2 = z\overline{z}$$

Remarque 11 :

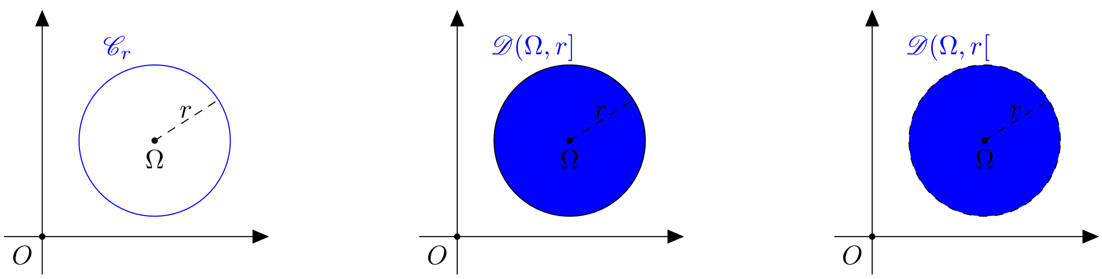
1. Ce n'est pas une malheureuse coïncidence si le module d'un complexe s'écrit de la même façon que la valeur absolue d'un réel. En effet pour tout $a \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, le module de $a = a + 0i$ vaut $|a| = \sqrt{a^2+0^2} = \sqrt{a^2}$ qui est lui-même égal à la valeur absolue de a. En conclusion le module étend la notion de valeur absolue des réels au complexes.
2. Attention cependant, l'égalité $|x| = \pm x$ valable pour la valeur absolue d'un réel $x \in \mathbb{R}$ est FAUX en général pour les complexes.
3. Même si la notation pour la valeur absolue et pour le module est identique, on veillera bien oralement à distinguer les deux notions, en particulier on ne parle pas de valeur absolue d'un complexe (lorsqu'il n'est pas réel).

Proposition II.3

- Soit $M \in \mathscr{P}$ un point du plan d'affixe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors $OM = |z|$.
- Soit $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ un vecteur du plan d'affixe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors $\|\vec{u}\| = |z|$.
- Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe alors $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = |z_B - z_A|$.

Cette formulation avec des complexes de la distance entre deux points nous permet de caractériser efficacement des objets géométriques. Soit $\Omega(\omega)$ un point du plan complexe et r un réel strictement positif.

- $\mathscr{C}_r = \{\, z \in \mathbb{Z} \mid |z-\omega| = r \,\}$ est le cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r.
- $\mathscr{D}(\Omega, r] = \{\, z \in \mathbb{Z} \mid |z-\omega| \leqslant r \,\}$ est le disque fermé de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r.
- $\mathscr{D}(\Omega, r[= \{\, z \in \mathbb{Z} \mid |z-\omega| < r \,\}$ est le disque ouvert de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r.
- Pour $\Omega'(\omega')$ un autre point du plan complexe, $\{\, z \in \mathbb{Z} \mid |z-\omega| = |z-\omega'| \,\}$ est la médiatrice du segment $[\Omega\Omega']$.



Exemple 12 : Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points du plan complexe $M(z)$ tel que l'affixe z vérifie $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$.

Proposition II.4

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a

1. $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
3. $|zz'| = |z|\,|z'|$
4. si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
5. $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$
6. $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.

Démonstration.

1. Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors on peut écrire $-z = a' + ib'$ avec $a' = -a$ et $b' = -b$. Donc $|-z| = \sqrt{(a')^2 + (b')^2} = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. De même $\overline{z}$ peut s'écrire $\overline{z} = a'' + ib''$ avec $a'' = a$ et $b'' = -b$. Donc $|\overline{z}| = \sqrt{(a'')^2 + (b'')^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.
2. Procédons par double implication. Si $z = 0 = 0 + i0$, il est clair que $|z| = 0$. Réciproquement, si $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0$ alors en élevant au carré, $a^2 + b^2 = 0$. Or $b^2 \geqslant 0$, donc $0 \leqslant a^2 \leqslant a^2 + b^2 = 0$. Donc par encadrement, $a^2 = 0$ et $a = 0$. En reprenant l'égalité $a^2 + b^2 = 0$, cela implique également que $b = 0$.
3. Soient $z = a + ib \in \mathbb{C}$ et $z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$, avec $(a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4$. Puisque $zz' = aa' - bb' + i\,(ab' + a'b)$, on en déduit que
$$\begin{aligned}
|zz'| &= \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2} \\
&= \sqrt{(aa')^2 - 2aa'bb' + (bb')^2 + (ab')^2 + 2aa'bb' + (a'b)^2} \\
&= \sqrt{a^2\left[(a')^2 + (b')^2\right] + b^2\left[(b')^2\,(a')^2\right]} \\
&= \sqrt{a^2\,|z'|^2 + b^2\,|z'|^2} \\
&= \sqrt{(a^2 + b^2)\,|z'|^2} \\
&= \sqrt{|z|^2\,|z'|^2}.
\end{aligned}$$
Or $|z|$ et $|z'|$ sont deux réels positifs, donc, $\sqrt{|z|^2\,|z'|^2} = |z|\,|z'|$ et on conclut que $|zz'| = |z|\,|z'|$.
4. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}^*$. D'après le point précédent, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z\frac{1}{z'}\right| = |z|\left|\frac{1}{z'}\right|$. Il nous reste donc à montrer que
$$\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}.$$
Or $\left|\frac{1}{z'}\right| = \left|\frac{\overline{z'}}{z'\overline{z'}}\right|$. Donc en appliquant la Proposition II.2, on obtient $\left|\frac{1}{z'}\right| = \left|\frac{\overline{z'}}{|z'|^2}\right| = \left|\overline{z'}\right|\left|\frac{1}{|z'|^2}\right|$. Or $\frac{1}{|z'|^2}$ est un réel positif, donc son module est également sa valeur absolue et est égal à lui-même : $\left|\frac{1}{|z'|^2}\right| = \frac{1}{|z'|^2}$. Ainsi, $\left|\frac{1}{z'}\right| = \left|\overline{z'}\right|\frac{1}{|z'|^2}$. En utilisant le point 1, on obtient que $\left|\frac{1}{z'}\right| = |z'|\frac{1}{|z'|^2} = \frac{1}{|z'|}$. Et finalement $\left|\frac{z}{z'}\right| = |z|\left|\frac{1}{z'}\right| = |z|\frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$.
5. Soit $z \in \mathbb{C}$. On sait que $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$. Or $\mathrm{Im}(z)^2 \geqslant 0$, donc $\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \geqslant \mathrm{Re}(z)^2$. Par croissance de la fonction racine carrée, $|z| \geqslant \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2} = |\mathrm{Re}(z)|$.
6. Idem au point précédent.

□

Exemple 13 : Déterminer le module du complexe $\frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^9}{(1-i)^7}$.

Remarque 14 :

1. L'application 7 peut se reformuler de la façon suivante :
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$
2. Les points 3 et 4 de la proposition précédente signifient que le module est compatible avec le produit et l'inverse. Cependant le module **N'est PAS** compatible avec l'addition comme le montre la proposition suivante.

Proposition II.5

1. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,
$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2 .$$
2. **(Inégalité triangulaire)** Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,
$$||z| - |z'|| \leqslant |z+z'| \leqslant |z| + |z'| .$$
3. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z+z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $z = 0$ ou il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $z' = \lambda z$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$
$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| .$$

Démonstration.

1. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$ deux complexes. D'après la Proposition II.2, on écrit
$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= (z+z') \times \overline{z+z'} \\ &= (z+z')\left(\overline{z} + \overline{z'}\right) \\ &= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\ &= |z|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} + |z'|^2 . \end{aligned}$$
Posons $Z = z\overline{z'}$. Alors on observe que
$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{\overline{z'}z} + |z'|^2 \\ &= |z|^2 + Z + \overline{Z} + |z'|^2 \\ &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}\,(Z) + |z'|^2 \\ &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2 . \end{aligned}$$
2. Commençons par montrer que $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$. D'après le point précédent on sait que $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2$. Or d'après le point 5 de la Proposition II.4, $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leqslant \left|\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)\right| \leqslant \left|z\overline{z'}\right| = |zz'|$. D'où,
$$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2 .$$
Par croissance de la fonction racine carrée et positivité des termes considérés, on conclut que $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$.
Pour la seconde inégalité, on écrit que $|z| = |z + z' - z'| \leqslant |z+z'| + |-z'| = |z+z'| + |z'|$. Donc $|z| - |z'| \leqslant |z+z'|$. De même (ou par symétrie des hypothèses sur z et z'), on montre que $|z'| - |z| \leqslant |z+z'|$ et finalement, $||z| - |z'|| \leqslant |z+z'|$.
3. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$ deux complexes tels que $|z+z'| = |z| + |z'|$. En élevant au carré, on obtient
$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 .$$
Donc d'après le point 1,
$$|z|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2 = |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 .$$
Ainsi, $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) = |zz'| = \left|z\overline{z'}\right|$. En élevant au carré, on obtient que $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)^2 = \mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)^2 + \mathrm{Im}\left(z\overline{z'}\right)^2$ et donc $\mathrm{Im}\left(z\overline{z'}\right) = 0$. De cette façon, $z\overline{z'} = \mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) = \left|z\overline{z'}\right|$. Donc $r = z\overline{z'}$ est un réel positif.
Si $z = 0$ on obtient la conclusion voulue.
Si $z \neq 0$, on note alors que $\overline{z'} = \frac{r}{z} = \frac{r}{|z|^2}\overline{z} = \lambda\overline{z}$, avec $\lambda = \frac{r}{|z|^2} \in \mathbb{R}_+$ et finalement en passant au conjugué $z' = \lambda z$.
4. On considère la proposition $P(n) : (\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad |z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|)$. Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ est vraie.
Initialisation. Pour $n = 1$, on a naturellement pour tout complexe $z_1 \in \mathbb{C}$, $|z_1| \leqslant |z_1|$. Donc $P(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ vraie et posons $(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On a alors d'après l'inégalité triangulaire avec $Z = z_1 + \cdots + z_n$ et z_{n+1} :
$$|z_1 + \cdots + z_n + z_{n+1}| = |Z + z_{n+1}| \leqslant |Z| + |z_{n+1}| = |z_1 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}| .$$

Or par l'hypothèse de récurrence $P(n)$, $|z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|$. D'où

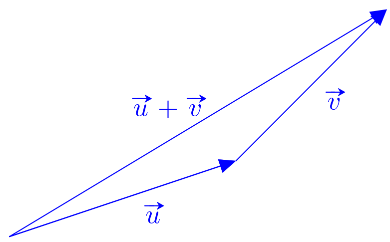
$$|z_1 + \cdots + z_n + z_{n+1}| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ et la propriété est héréditaire.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire

$$\forall (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \qquad |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

□

Interprétation géométrique. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan d'affixe z et z' respectivement. L'inégalité $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ se traduit par $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, c'est à dire que la longueur d'un côté d'un triangle (ici $\|\vec{u} + \vec{v}\|$) est inférieur à la somme de longueurs de deux autres côtés du triangle ($\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$).



II.2 Les complexes de module 1

Définition II.6

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}.$$

Géométriquement $\mathbb{U}$ est dans le plan complexe le cercle de centre O et de rayon 1.

Proposition II.7

L'ensemble $\mathbb{U}$ muni du produit $\times$ est un groupe commutatif car l'élément neutre 1 est dans $\mathbb{U}$ et l'ensemble est stable par produit et passage à l'inverse :

- $1,\ -1,\ i,\ -i \in \mathbb{U}$.
- $\forall z \in \mathbb{U}, \quad z\overline{z} = |z|^2 = 1$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2, \quad zz' \in \mathbb{U}$
- $\forall z \in \mathbb{U}, \quad \frac{1}{z} = \overline{z} \in \mathbb{U},\ -z \in \mathbb{U}$.

Soit $z = a + ib \in \mathbb{U}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On sait que $|z|^2 = a^2 + b^2$. Donc par la Proposition V.4 du chapitre 3, on sait qu'il existe un unique $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$ Ainsi, sans surprise, il est possible de paramétrer l'ensemble $\mathbb{U}$ de la même façon que le cercle trigonométrique.

Proposition II.8

Pour tout $z \in \mathbb{U}$, il existe un unique $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

$$\mathbb{U} = \{ \cos(\theta) + i \sin(\theta) \mid \theta \in [0; 2\pi[\}.$$

Exemple 15 : Donner le paramétrage de 1, i, -1, $-i$. Quelle est la forme algébrique du complexe de module 1 de paramètre $\theta = -\frac{\pi}{3}$?

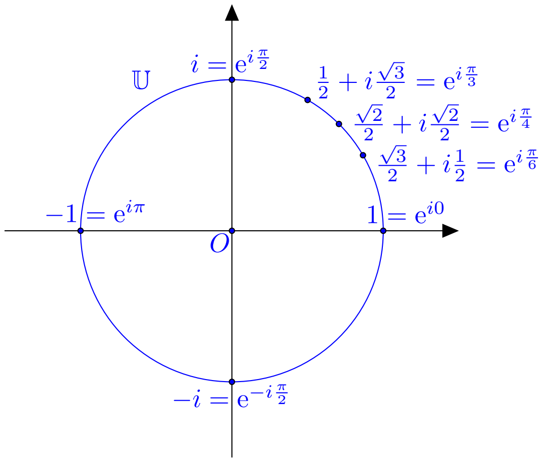
Définition II.9

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit **l'exponentielle complexe** sur $i\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Remarque 16 :

1. Bien que l'on ait pris la même notation que pour l'exponentielle réelle, vous constatez que ce n'est pas la même définition. Nous allons vérifier par la suite que cette confusion des notations est valide car l'exponentielle complexe va vérifier les mêmes propriétés et étendre l'exponentielle réelle.
2. Avec cette notation, la Proposition II.9, peut se reformuler de la façon suivante :
$$\mathbb{U} = \left\{ \mathrm{e}^{i\theta} \;\middle|\; \theta \in [0; 2\pi[\right\}.$$
3. On retrouve sur le cercle les valeurs remarquables des fonctions trigonométriques :



Proposition II.10

1. Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$,
$$\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi.$$
2. Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$,
$$\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{i\theta'}.$$
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}.$$

Démonstration.

1. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Par définition de l'exponentielle complexe,
$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'} &\Leftrightarrow \cos(\theta) + i\sin(\theta) = \cos(\theta') + i\sin(\theta') \\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\cos(\theta) = \cos(\theta') \\ \sin(\theta) = \sin(\theta')\end{cases}.\end{aligned}$$
Et d'après la Proposition V.3 du chapitre 3,
$$\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi.$$
2. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. En utilisant les formules trigonométriques,
$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')} &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i\cos(\theta)\sin(\theta') + i\cos(\theta')\sin(\theta) \\ &= \cos(\theta)\left[\cos(\theta') + i\sin(\theta')\right] + i\sin(\theta)\left[\cos(\theta') + i\sin(\theta')\right] \\ &= \left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]\left[\cos(\theta') + i\sin(\theta')\right] \\ &= \mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{i\theta'}.\end{aligned}$$
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Toujours avec les formules trigonométriques,
$$\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \overline{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \mathrm{e}^{-i\theta}.$$
De plus on a vu dans la Proposition II.7, que si $z \in \mathbb{U}$, alors $\frac{1}{z} = \overline{z}$. Donc $\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta}$.

□

Proposition II.11 (Formules d'Euler)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration. Exercice ! □

Application 17 : Factorisation de sommes d'exponentielles.

- Soit $t \in \mathbb{R}$ en appliquant la méthode de l'angle moitié à $1 + e^{it}$ on obtient une expression factorisée :

$$1 + e^{it} = e^{i\frac{t}{2}} \left(e^{-i\frac{t}{2}} + e^{i\frac{t}{2}} \right) = 2\, e^{i\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

  De même,

$$1 - e^{it} = e^{i\frac{t}{2}} \left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}} \right) = -2i\, e^{i\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

- On peut étendre le principe. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{i\theta} + e^{i\phi} = e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}\, e^{-i\frac{\theta+\phi}{2}} \left(e^{i\theta} + e^{i\phi}\right) = e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} \left(e^{i\frac{\theta-\phi}{2}} + e^{i\frac{\phi-\theta}{2}}\right) = 2\, e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} \cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$
$$e^{i\theta} - e^{i\phi} = e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}\, e^{-i\frac{\theta+\phi}{2}} \left(e^{i\theta} - e^{i\phi}\right) = e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} \left(e^{i\frac{\theta-\phi}{2}} - e^{i\frac{\phi-\theta}{2}}\right) = 2i\, e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} \sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

Exemple 18 : On peut alors retrouver les formules trigonométriques de factorisation : pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\cos(p) + \cos(q) &= \frac{e^{ip} + e^{-ip}}{2} + \frac{e^{iq} + e^{-iq}}{2} \\
&= \frac{e^{ip} + e^{iq}}{2} + \frac{e^{-ip} + e^{-iq}}{2} \\
&= e^{i\frac{p+q}{2}}\, \frac{e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{q-p}{2}}}{2} + e^{-i\frac{p+q}{2}}\, \frac{e^{i\frac{q-p}{2}} + e^{i\frac{p-q}{2}}}{2} \\
&= e^{i\frac{p+q}{2}} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) + e^{-i\frac{p+q}{2}} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
&= \left(e^{i\frac{p+q}{2}} + e^{-i\frac{p+q}{2}}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).
\end{aligned}$$

Retrouver de même les autres formules trigonométriques de factorisation.

Proposition II.12 (Formules de Moivre)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Démonstration. Exercice ! □

Exemple 19 : Soit $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer z^{100}.

Application 20 : Linéarisation. Grâce à cette propriété, il devient plus aisée de linéariser certaines expressions trigonométriques. Par exemple pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos^3(\theta) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left[\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^3 + 3\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^2\mathrm{e}^{-i\theta} + 3\,\mathrm{e}^{i\theta}\left(\mathrm{e}^{-i\theta}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-i\theta}\right)^3\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\mathrm{e}^{3i\theta} + 3\,\mathrm{e}^{2i\theta}\mathrm{e}^{-i\theta} + 3\,\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-2i\theta} + \mathrm{e}^{-3i\theta}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{e}^{3i\theta}+\mathrm{e}^{-3i\theta}}{2} + 3\frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)\right].
\end{aligned}$$

II.3 Argument d'un nombre complexe

Proposition II.13

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que

$$z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}.$$

De plus pour tout $(r,r') \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et tout $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$,

$$z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} = r'\,\mathrm{e}^{i\theta'} \qquad \Leftrightarrow \qquad r = r' = |z| \text{ et } \theta \equiv \theta' \ [2\pi].$$

Démonstration. Existence. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Puisque $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$, par la Proposition II.8, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{i\theta}$ et donc cela démontre l'existence d'un couple $(r = |z|, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $z = |z|\,\mathrm{e}^{i\theta}$.
Unicité. Soient $z \in \mathbb{C}^*$, $(r,r') \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} = r'\,\mathrm{e}^{i\theta'}.$$

En passant au module, il est clair que $|z| = |r| = |r'|$. Or $r \geqslant 0$ et $r' \geqslant 0$, donc $|z| = r = r'$. De plus, on en déduit que $r\,\mathrm{e}^{i\theta} = r\,\mathrm{e}^{i\theta'}$ et donc $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'}$. D'après la Proposition II.10, on conclut que $\theta \equiv \theta'$ $[2\pi]$. □

Définition II.14

- Soient $z \in \mathbb{C}^*$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$. Le réel θ est dit être **un argument** de z et on note $\theta = \arg(z)$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, l'écriture $z = |z|\,\mathrm{e}^{i\arg(z)}$ est appelée **la forme polaire** ou **la forme trigonométrique** de z.

Remarque 21 :

1. D'après la proposition tout complexe non nul possède un argument mais cet argument n'est pas unique. Si θ est un arguement de z alors $\arg(z + 2k\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$, l'est également. Il est dit unique à 2π près. On peut également affirmer que tout complexe non nul admet une infinité d'arguments.
2. On ne parle pas de la forme polaire ni de l'argument du complexe 0.

Proposition II.15

Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta = \arg(z)$ alors,

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$$

Application 22 : Déterminer la forme polaire de $\sqrt{3}+i$, $-1+i$, $3-\sqrt{3}i$, $-4\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{7}}$.

Exemple 23 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer la forme polaire du complexe $z = 1 + \mathrm{e}^{i\theta}$.

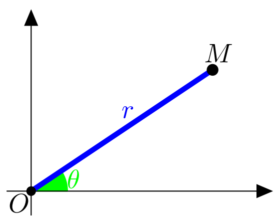
Proposition II.16

1. Pour tout $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$,
$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \qquad [2\pi].$$
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \qquad [2\pi].$$
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$,
$$\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \qquad [2\pi].$$

Remarque 24 : Le module et l'argument sont compatibles avec le produit et le passage à l'inverse. La forme trigonométrique est donc recommandée pour le calcul d'un produit ou d'un quotient de complexes tandis qu'en général (attention aux exceptions toujours possibles) la forme algébrique se prête mieux au calcul d'une somme ou d'une différence.

Interprétation géométrique. La forme polaire d'un complexe z renvoie aux coordonnées polaires du point M d'affixe z. Si $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors

- (rappel) le module de z est la distance de M à l'origine : $r = OM$,
- l'argument de z est une mesure de l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.



Proposition II.17

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan d'affixe z, alors $\arg(z)$ est une mesure de l'angle $\left(\vec{i}, \vec{u}\right)$.
2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan d'affixe z et z' respectivement, alors
$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \ [2\pi].$$
3. Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ trois points du plan complexe, alors
$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \ [2\pi].$$

Démonstration.

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan d'affixe z. Posons M le point du plan complexe tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Alors M a pour affixe z et donc $\arg(z) \equiv \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{i}, \vec{u}\right) \ [2\pi]$.
2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan d'affixe z et z' respectivement. On a
$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \left(\vec{u}, \vec{i}\right) + \left(\vec{i}, \vec{v}\right) \equiv \left(\vec{i}, \vec{v}\right) - \left(\vec{i}, \vec{u}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z) \equiv \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \ [2\pi].$$
3. Soient $A(z_A)$, $B(z_b)$ et $C(z_C)$ trois points du plan complexe. Puisque $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $z_C - z_A$, le résultat est un cas particulier du point précédent.

□

III Prochainement... Equations complexes

Définition III.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On appelle **racine n-ième de l'unité** tout complexe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = 1$.
- On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité.

Proposition III.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est donné par :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}.$$

Définition III.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. On appelle **racine n-ième de z** tout complexe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que

$$\omega^n = z.$$

Proposition III.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout complexe non nul $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, admet exactement n racines n-ième distinctes données par

$$\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \qquad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Leonhard EULER *(Bâle 1707 - Saint-Pétersbourg 1783) est un mathématicien extrêmement prolifique dont l'étendue de son oeuvre touchant à tous les domaines des mathématiques et la qualité de sa rédaction le désignent comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. De parents pauvres, Euler suit des études secondaires à Bâle où les mathématiques ne sont pas enseignées. A l'âge de treize ans il entre à l'université pour étudier la philosophie et le droit. Ayant pris des cours de mathématiques auprès d'un étudiant, Jean Bernoulli (frère de Jacques Bernoulli qui donna son nom à la variable aléatoire) lui remarque des aptitudes dans ce domaine et lui donne alors des cours particuliers tous les samedis. La Suisse offrant peu de possibilités pour une carrière de mathématicien, Euler décrocha une place à l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg en 1727 grâce à l'appui de la famille Bernoulli.*
En 1733 il épouse la fille d'une artiste russe et aura par la suite 13 enfants. Euler fut réputé pour sa patience envers ses enfants et sa capacité à rédiger des articles tout en jouant avec eux. Après avoir fréquenté la cour de Frédéric le Grand en Prusse, il revient à un poste en Russie sur l'invitation de Catherine II. Une fièvre soudaine lui fait perdre l'usage de son oeil droit et il devient complètement aveugle à l'âge de soixante quatre ans. Son flot de publications ne s'en trouve pas tari et grâce notamment à une mémoire colossale (il pouvait réciter les neuf mille vers de l'Enéide par coeur) il dicte inlassablement ses textes à ses fils et son valet. Il s'éteint à l'âge de soixante-seize ans alors qu'il consommait paisiblement une tasse de thé avec ses amis.
Euler n'est pas à l'origine de grandes nouvelles théories mais aborda tous les domaines des mathématiques et en particulier l'analyse à laquelle il donnera un nouvel essor et la théorie des nombres. Il s'émerveilla devant la formule

$$\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$$

qui relie les cinq nombres fondamentaux 0, 1, i, e *et* π.

« *Lisez Euler, c'est notre maître à tous.* »

Pierre-Simon de Laplace

Une entreprise a besoin d'embaucher un mathématicien. Après plusieurs entretiens et les vérifications d'usages, trois jeunes diplômés enthousiastes sont sélectionnés. On leur pose alors l'ultime question du salaire et de leurs exigences.
Le premier est un mathématicien pur.
« -Vous savez, du moment que vous me fournissez du papier et des crayons... Est-ce que 30 000 euros serait abusif ? »
Le deuxième est un mathématicien appliqué. Plus à l'aise, il propose :
« Afin d'être raisonnable, avec un ordinateur performant et un assistant, je pense que 60 000 euros feront l'affaire. »
On auditionne alors le dernier candidat, un mathématicien en finances. Très détendu dans son costard, il propose :
« -Outre la voiture de fonction, un bureau de 30m^2 *et la prise en charge des déjeuners d'affaire, je dirais 300 k.*
Surpris le recruteur rétorque
-Vous savez qu'un mathématicien pur est prêt à accepter un salaire dix fois moins cher...
Charmeur, le financier se penche en souriant
-Eh bien oui, j'avais justement dans l'idée de prendre 135 000 pour moi, 135 000 pour vous et 30 000 pour le mathématicien pur qui ferait le travail ! »