

## Chapitre IX : Equations différentielles

Dans tout ce chapitre  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### I Equations différentielles linéaires d'ordre 1

#### I.1 Généralités

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  trois fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ , continues sur  $I$ . Une équation différentielle linéaire d'ordre 1, est une équation où l'inconnue est une fonction  $y$ , dérivable sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  telle que

$$\forall t \in I, \quad \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t). \quad (E)$$

Dans cette équation, les fonctions  $\alpha, \beta, \gamma$  sont données et l'on cherche à déterminer la fonction  $y$ . Lorsque la fonction  $\alpha$  ne s'annule pas sur  $I$ , l'équation (E) s'écrit alors :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}y(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}. \quad (E)$$

On dit alors que (E) est résolue en  $y'$  (bien que l'on n'ait encore rien résolu concernant les solutions) sur  $I$ .

#### Définition I.1

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a$  et  $b$  deux fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ , continues sur  $I$ .

- L'équation d'inconnue  $y$ , une fonction dérivable sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , définie par

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad (E)$$

est appelée **équation différentielle linéaire d'ordre 1** résolue.

- La fonction  $b : I \rightarrow \mathbb{K}$  est appelée **le second membre** de l'équation (E).
- A toute équation différentielle (E), on associe une équation différentielle linéaire d'ordre 1 **homogène** ou **sans second membre** définie comme étant l'équation d'inconnue  $y$  une fonction de  $I \rightarrow \mathbb{K}$ , dérivable sur  $I$  telle que

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0. \quad (E_0)$$

#### Remarque 1 :

1. La première condition pour être une solution d'une équation différentielle d'ordre 1 est avant tout d'être une fonction dérivable sur l'intervalle  $I$ .
2. L'équation est dite **linéaire** car la dépendance dans l'équation de  $y$  et  $y'$  est linéaire (on a du  $y$  ou  $y'$  à la puissance 1). Il existe des équations différentielles (en général bien plus compliquées) où  $y'$  est donnée en fonction de  $y^2$  (équation de Riccati) ou de  $\sin(y)$  (mouvement d'un pendule) par exemple.
3. L'équation est dite **d'ordre 1** car l'on ne considère que la dérivée première de  $y$ .
4. Il est usuel (même si pas très rigoureux) d'écrire la variable  $t$  pour les fonctions  $a$  et  $b$  mais de ne pas l'écrire pour les fonctions  $y$  et  $y'$ . L'équation (E) s'écrit souvent

$$y' + a(t)y = b(t). \quad (E)$$

#### I.2 Equation homogène d'ordre 1

#### Proposition I.2

On reprend les notations de la définition I.1. L'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'équation homogène ( $E_0$ ) est un espace vectoriel/vérifie les propriétés suivantes :

- L'élément nul appartient à  $\mathcal{S}_0$  : la fonction nulle sur  $I$  est un élément de  $\mathcal{S}_0$
- L'ensemble  $\mathcal{S}_0$  est stable par combinaison linéaire : pour tout  $(y_1, y_2) \in \mathcal{S}_0^2$  et tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ , on a

$$\lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathcal{S}_0.$$

**Démonstration.** Le premier point est immédiat : si  $y_0 : I \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $t \mapsto 0$  est la fonction nulle, alors  $y_0$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $t \in I$ ,

$$y_0'(t) + a(t)y_0(t) = 0 + a(t) \times 0 = 0.$$

Pour le second point, on pose  $(y_1, y_2) \in \mathcal{S}_0^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . Puisque les fonctions  $y_1$  et  $y_2$  sont dans  $\mathcal{S}_0^2$ , on en déduit que  $y_1$  et  $y_2$  sont dérivables sur  $I$ , donc par combinaison linéaire de fonctions dérivables, on en déduit que  $\lambda y_1 + \mu y_2$  est une fonction dérivable sur  $I$  et

$$\forall t \in I, \quad (\lambda y_1 + \mu y_2)'(t) = \lambda y_1'(t) + \mu y_2'(t).$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad (\lambda y_1 + \mu y_2)'(t) + a(t)(\lambda y_1 + \mu y_2)(t) &= \lambda y_1'(t) + \mu y_2'(t) + a(t)\lambda y_1 + a(t)\mu y_2(t) \\ &= \lambda (y_1'(t) + a(t)y_1(t)) + \mu (y_2'(t) + a(t)y_2(t)). \end{aligned}$$

Puisque  $y_1$  et  $y_2$  sont solutions de  $(E_0)$ , on en déduit que

$$\forall t \in I, \quad (\lambda y_1 + \mu y_2)'(t) + a(t)(\lambda y_1 + \mu y_2)(t) = 0$$

et donc on a bien  $\lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathcal{S}_0$ . □

**Remarque 2 :** Notez bien que la proposition précédente n'est pas vraie si l'on considère une équation différentielle avec un second membre  $b$  non nul.

### Définition I.3

- Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$  une fonction de  $I$ , un intervalle de  $\mathbb{R}$ , dans  $\mathbb{K}$ . Alors on pose

$$\text{Vect}(f) = \{ \lambda f \mid \lambda \in \mathbb{K} \}.$$

Cet ensemble est appelé **droite vectorielle engendrée par  $f$** .

- Soit  $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ . Alors on pose

$$\text{Vect}(f, g) = \{ \lambda f + \mu g \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \}.$$

Cet ensemble est appelé **plan vectoriel engendré par  $f$** .

**Remarque 3 :**

1. On peut définir de la même façon des espaces vectoriels engendrés par trois, quatre, ...,  $n$  fonctions.
2. Montrer que chacun de ces espaces  $\text{Vect}(f)$  et  $\text{Vect}(f, g)$  est bien un espace vectoriel i.e. vérifie
  - (i) La fonction nulle appartient à ces ensembles.
  - (ii) Si  $u$  et  $v$  sont deux éléments d'un de ces ensembles et si  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$  alors la fonction  $\alpha u + \beta v$  est aussi une fonction de cet ensemble.

### Théorème I.4

On reprend les notations de la définition I.1. Soit  $A : I \rightarrow \mathbb{K}$  une primitive de  $a$  sur  $I$ . Alors,

$$y \text{ est solution de } (E_0) \quad \Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{K}, \forall t \in I, \quad y(t) = C e^{-A(t)}.$$

Autrement dit l'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'équation  $(E_0)$  est donné par :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto C e^{-A(t)} \end{array} \mid C \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto e^{-A(t)} \end{array} \right).$$

**Démonstration.** *Analyse.* Soit  $y \in \mathcal{S}_0$ . On pose  $z$  la fonction définie sur  $I$  par

$$\forall t \in I, \quad z(t) = y(t) e^{A(t)}.$$

Puisque  $A$  est une primitive de  $a$  sur  $I$ , la fonction  $A$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $t \in I$ ,  $A'(t) = a(t)$ . La fonction  $y$  est un élément de  $\mathcal{S}_0$  et est donc aussi dérivable sur  $I$ . Ainsi par produit et composition de fonctions dérivables, la fonction  $z$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $t \in I$ ,

$$z'(t) = y'(t) e^{A(t)} + A'(t) y(t) e^{A(t)} = y'(t) e^{A(t)} + a(t) y(t) e^{A(t)}$$

Or  $y \in \mathcal{S}_0$  donc  $\forall t \in I, y'(t) = -a(t)y(t)$ . Ainsi,

$$\forall t \in I, \quad z'(t) = -a(t)y(t)e^{A(t)} + a(t)y(t)e^{A(t)} = 0.$$

Donc la fonction  $z$  est constante sur l'intervalle  $I$ . Il existe  $C \in \mathbb{K}$  telle que  $\forall t \in \mathbb{K}, z(t) = C$ . Donc

$$\forall t \in \mathbb{K}, \quad y(t) = z(t)e^{-A(t)} = Ce^{-A(t)}.$$

Dans cette analyse, nous avons donc montré que

$$\mathcal{S}_0 \subseteq \left\{ t \mapsto Ce^{-A(t)} \mid C \in \mathbb{K} \right\}.$$

*Synthèse.* Démontrons l'inclusion réciproque, c'est-à-dire que les fonctions  $y : t \mapsto Ce^{-A(t)}$  sont solutions de  $(E_0)$  sur  $I$ . Puisque  $A$  est une primitive de  $a$  sur  $I$ , la fonction  $A$  est dérivable sur  $I$  et par suite la fonction  $y$  est dérivable sur  $I$  par composition de fonctions dérivables. De plus

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = -A'(t)Ce^{-A(t)} = -a(t)y(t)$$

et donc  $y$  est une solution de  $(E_0)$ . Finalement on a montré également que

$$\left\{ t \mapsto Ce^{-A(t)} \mid C \in \mathbb{K} \right\} \subseteq \mathcal{S}_0.$$

□

#### Remarque 4 :

1. Notez que l'hypothèse  $a$  continue implique bien l'existence d'une primitive  $A$  de  $a$  (cf chapitre précédent).
2. Si  $\tilde{A}$  est une autre primitive de  $a$ , on sait qu'il existe une constante  $\lambda \in \mathbb{K}$  telle que  $\forall t \in \mathbb{K}, \tilde{A}(t) = A(t) + \lambda$ .  
Donc pour tout  $C \in \mathbb{K}$ ,

$$\forall t \in I, \quad Ce^{-\tilde{A}(t)} = Ce^{-A(t)-\lambda} = Ce^{-A(t)}e^{-\lambda} = \tilde{C}e^{-A(t)},$$

avec  $\tilde{C} = Ce^{-\lambda}$ . Ainsi on s'aperçoit que l'ensemble  $\{t \mapsto Ce^{-A(t)} \mid C \in \mathbb{K}\}$  ne dépend pas de la primitive choisie. D'où l'écriture concise en une droite vectoriel  $\text{Vect}(t \mapsto e^{-A(t)})$ .

3. Soit  $y_0 \in \mathcal{S}_0$ . Si  $y_0$  n'est pas la fonction nulle alors  $y \in \mathcal{S}_0$  si et seulement s'il existe  $C \in \mathbb{K}$  telle que  $y = Cy_0$ . Autrement dit les éléments de  $\mathcal{S}_0$  sont tous colinéaires. Cela rejoint l'idée que l'espace vectoriel  $\mathcal{S}_0$  est une *droite vectorielle*. Un seul élément de  $\mathcal{S}_0$  permet de déduire l'ensemble  $\mathcal{S}_0$ .
4. La proposition précédente garantit notamment l'existence d'une solution non nulle et même d'une infinité de solutions.

#### Corollaire I.5

Soit  $a \in \mathbb{K}$ . L'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'équation homogène d'ordre 1 linéaire à **coefficient constant**

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + ay(t) = 0. \quad (E_0)$$

est donné par

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto Ce^{-at} \end{array} \mid C \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto e^{-at} \end{array} \right).$$

**Exemple 5 :** Dans chacun des cas, résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle.

1.  $y' - 2ty = 0$
2.  $y' + (t^3 + 4t^2 - \sqrt{2})y = 0$
3.  $y' + e^t y = 0$

### I.3 Equation d'ordre 1 avec second membre

#### Théorème I.6

On reprend les notations de la définition I.1 et du théorème I.4. On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des fonctions  $y$  solutions de l'équation  $(E)$ . On suppose que  $\mathcal{S}$  est non vide et on fixe  $y_p$  une solution de  $(E)$ . Alors l'ensemble  $\mathcal{S}$  est donné par

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 = \{y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathcal{S}_0\} = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto y_p(t) + Ce^{-A(t)} \end{array} \mid C \in \mathbb{K} \right\} = y_p + \text{Vect} \left( \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto e^{-A(t)} \end{array} \right).$$

**Démonstration.** *Analyse.* Soient  $y \in \mathcal{S}$  et  $z = y - y_p$ . La fonction  $z$  est dérivable sur  $I$  comme différence de fonctions dérivables sur  $I$  et

$$\forall t \in I, \quad z'(t) + a(t)z(t) = y'(t) - y_p'(t) + a(t)y(t) - a(t)y_p(t) = \underbrace{y'(t) + a(t)y(t)}_{=b(t) \text{ car } y \in \mathcal{S}} - \underbrace{(y_p'(t) + a(t)y_p(t))}_{=b(t) \text{ car } y_p \in \mathcal{S}}$$

Donc  $\forall t \in I, z'(t) + a(t)z(t) = b(t) - b(t) = 0$ . Donc la fonction  $z$  est un élément de  $\mathcal{S}_0$ . Ainsi, d'après le théorème I.4, il existe  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $\forall t \in I, z(t) = C e^{-A(t)}$  et par conséquent,

$$\forall t \in I, \quad y(t) = z(t) + y_p(t) = y_p(t) + C e^{-A(t)}.$$

*Synthèse.* Réciproquement si  $y = y_p + y_0$  avec  $y_0 \in \mathcal{S}_0$ , alors  $y$  est dérivable et

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = y_p'(t) + y_0'(t) + a(t)y_p(t) + a(t)y_0(t) = \underbrace{y_p'(t) + a(t)y_p(t)}_{=b(t) \text{ car } y_p \in \mathcal{S}} + \underbrace{y_0'(t) + a(t)y_0(t)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathcal{S}_0} = b(t).$$

et par conséquent  $y \in \mathcal{S}$ . □

### Remarque 6 :

1. Le théorème précédent suppose l'existence d'au moins une solution (et alors il en existe une infinité) mais nous n'avons pas encore démontré en toute généralité que  $\mathcal{S}$  admet une solution.
2. On dit souvent que  $y_p$  est une solution particulière de  $\mathcal{S}$ . Ne vous y trompez pas,  $y_p$  est en réalité une solution quelconque. Il nous en faut juste une.
3. L'ensemble des solutions  $\mathcal{S}$  est obtenu à partir de celui de  $\mathcal{S}_0$  « translaté » d'une fonction  $y_p$ . On dit alors que l'ensemble solution  $\mathcal{S}$  est un espace affine de direction l'espace vectoriel  $\mathcal{S}_0$ .

### Exemple 7 :

1. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Déterminer l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $y' + ay = b$ .
2. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $y' + xy = x^3$ .

### Proposition I.7 (Principe de superposition)

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a, b_1$  et  $b_2$  des fonctions continues sur  $I$ . On considère les équations suivantes, d'inconnue  $y$  une fonction dérivable sur  $I$  :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t) \quad (E_1)$$

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b_2(t) \quad (E_2)$$

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t) + b_2(t). \quad (E)$$

Soient  $y_1$  une solution de  $(E_1)$  et  $y_2$  une solution de  $(E_2)$ . Alors la fonction  $y = y_1 + y_2$  est une solution de  $(E)$ .

**Démonstration.** Exercice! □

**Exemple 8 :** Résoudre sur  $]0; +\infty[$  l'équation différentielle  $y' - \frac{1}{x}y = x e^x + x$ .

### Proposition I.8

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  et  $b$  deux fonctions continues sur  $I$ . On suppose  $a$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $b$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . On considère les équations

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad (E)$$

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = \operatorname{Re}(b(t)) \quad (E')$$

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = \operatorname{Im}(b(t)). \quad (E'')$$

Si  $y$  est une solution de  $(E)$  alors  $\operatorname{Re}(y)$  est une solution de  $(E')$  et  $\operatorname{Im}(y)$  est une solution de  $(E'')$ .

## I.4 Recherche d'une solution particulière

On considère le cas d'une équation différentielle linéaire avec second membre :

$$\forall x \in I, \quad y' + ay = b(x), \quad (E)$$

où  $a \in \mathbb{K}$  est une constante.

- **Second membre polynomiale.** Si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $b(x) = P(x)$ , avec  $P$  un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\forall x \in I, \quad y' + ay = P(x). \quad (E)$$

alors on cherche une solution  $y_p$  de (E) sous la forme d'un polynôme de degré  $n$ .

- **Second membre exponentiel.** Si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $b(x) = e^{mx}$ , avec  $m \in \mathbb{K}$  et  $m \neq -a$  :

$$\forall x \in I, \quad y' + ay = e^{mx}. \quad (E)$$

alors on cherche une solution  $y_p$  de (E) sous la forme exponentielle  $x \mapsto \lambda e^{mx}$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

**Cas particulier.** Si  $m = -a$  alors on cherche une solution  $y_p$  de (E) sous la forme exponentielle  $x \mapsto x e^{mx}$ .

- **Généralisation.** Si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $b(x) = P(x) e^{mx}$ , avec  $P$  un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{K}$  :

$$\forall x \in I, \quad y' + ay = P(x) e^{mx}. \quad (E)$$

alors on cherche une solution  $y_p$  de (E) sous la forme  $\begin{cases} x \mapsto Q(x) e^{mx} & \text{si } m \neq -a \\ x \mapsto xQ(x) e^{mx} & \text{si } m = -a \end{cases}$ , avec  $\deg(Q) = \deg(P)$ .

- **Second membre trigonométrique.** Si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $b(x) = \sin(mx)$  ou  $b(x) = \cos(mx)$ , avec  $m \in \mathbb{K}$ , ou bien l'on recherche directement une solution trigonométrique ou bien on transforme la fonction trigonométrique en exponentielle complexe et on utilise la proposition I.8.

**Exemple 9 :** Dans chacun des cas suivant, déterminer les solutions sur  $\mathbb{R}$  des équations différentielles.

1.  $y' + 2y = e^{-x}$

2.  $y' + 2y = (x^2 + 1) e^{-2x}$

## I.5 Méthode de variation de la constante

Une façon générale de rechercher une solution particulière est d'appliquer la méthode de variation de la constante. Voici l'idée de la méthode :

1. On suppose  $y$  une fonction dérivable sur  $I$ .
2. On pose pour tout  $t \in I$ ,  $z(t) = y(t) e^{A(t)}$ , où  $A$  est une primitive de  $a$ . Autrement dit la fonction  $y$  s'écrit  $y = z y_0$ , où pour tout  $t \in I$ ,  $y_0(t) = e^{-A(t)}$  et donc  $y_0$  est une solution de l'équation homogène  $(E_0)$  associée à (E).
3. On traduit le fait que  $y$  est solution de (E) et on en déduit une expression de la dérivée de  $z$ .
4. On intègre l'expression obtenue à l'étape précédente, on en déduit une formule pour  $z$ .
5. On conclut une expression de  $y$ .

### Théorème I.9 (Méthode de variation de la constante)

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  et  $b$  deux fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{K}$  continues sur  $I$ . On considère  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$\forall t \in I, \quad y' + a(t)y = b(t). \quad (E)$$

On pose  $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$  et  $\Gamma$  une primitive de  $t \mapsto b(t) e^{A(t)}$  sur  $I$ . Alors

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto \Gamma(t) e^{-A(t)} + C e^{-A(t)} \end{array} \mid C \in \mathbb{K} \right\}.$$

**Démonstration.** *Analyse.* Soient  $y$  une solution de (E) et  $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$ . On pose

$$\forall t \in I, \quad z(t) = y(t) e^{A(t)}.$$

La fonction  $z$  est dérivable sur  $I$  comme produit et composée de fonction dérivables sur  $I$  (rappelons que  $A$  étant la primitive d'une fonction continue est  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ). De plus

$$\forall t \in I, \quad z'(t) = y'(t) e^{A(t)} + A'(t)y(t) e^{A(t)} = y'(t) e^{A(t)} + a(t)y(t) e^{A(t)} = (y'(t) + a(t)y(t)) e^{A(t)}.$$

Comme  $y$  est une solution de  $(E)$ , on en déduit que

$$\forall t \in I, \quad z'(t) = b(t) e^{A(t)}.$$

La fonction  $t \mapsto b(t) e^{A(t)}$  est continue sur  $I$  et admet donc des primitives sur  $I$ . Soit  $\Gamma$  une primitive de  $t \mapsto b(t) e^{A(t)}$  sur  $I$ . Alors il existe  $C \in \mathbb{K}$  telle que

$$\forall t \in I, \quad z(t) = \Gamma(t) + C.$$

En conséquence, on en déduit que

$$\forall t \in I, \quad y(t) = z(t) e^{-A(t)} = \Gamma(t) e^{-A(t)} + C e^{-A(t)}.$$

*Synthèse.* Réciproquement si  $\forall t \in I, y(t) = \Gamma(t) e^{-A(t)} + C e^{-A(t)}$  alors  $y$  est dérivable sur  $I$  et

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) &= \Gamma'(t) e^{-A(t)} - A'(t)\Gamma(t) e^{-A(t)} - A'(t)C e^{-A(t)} + a(t)\Gamma(t) e^{-A(t)} + Ca(t) e^{-A(t)} \\ &= b(t) e^{A(t)} e^{-A(t)} - a(t)\Gamma(t) e^{-A(t)} - a(t)C e^{-A(t)} + a(t)\Gamma(t) e^{-A(t)} + Ca(t) e^{-A(t)} \\ &= b(t). \end{aligned}$$

Ainsi  $y \in \mathcal{S}$ . □

### Remarque 10 :

1. Le théorème précédent assure donc l'existence d'une solution (et même d'une infinité).
2. Vous remarquez qu'avec la méthode de variation de la constante, on ne se contente pas de trouver une seule solution mais on trouve toutes les solutions de  $(E)$ .
3. La méthode de variation de la constante peut paraître systématique pour trouver une solution particulière. Cependant d'une part elle peut être longue, il est donc utile de ne pas louper les solutions « évidentes » pour gagner du temps de calcul, d'autre part elle nécessite de déterminer une primitive de  $t \mapsto b(t) e^{A(t)}$  ce qui n'est pas toujours possible de façon explicite.

**Exemple 11 :** Retrouver les solutions de l'équation différentielle  $y' + \frac{1}{x}y = x e^x$  sur  $\mathbb{R}$  à l'aide de la méthode de variation de la constante.

## I.6 Résolution avec condition initiale

### Définition I.10

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  et  $b$  deux fonctions continues sur  $I$  dans  $\mathbb{K}$ ,  $t_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{K}$ . On appelle **problème de Cauchy** l'équation suivante d'inconnue  $y$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{K}$  dérivable sur  $I$ ,

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = b(t), & \forall t \in I, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

### Théorème I.11

Pour tout  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ , il existe une unique solution au problème de Cauchy.

**Démonstration.** *Analyse/Unicité.* Soit  $y$  une solution au problème de Cauchy, alors  $y$  est une solution de

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t). \tag{E}$$

Donc d'après le théorème I.9, il existe  $C \in \mathbb{K}$  telle que

$$\forall t \in I, \quad y(t) = \Gamma(t) e^{-A(t)} + C e^{-A(t)},$$

où  $A$  est une primitive de  $a$  et  $\Gamma$  une primitive de  $t \mapsto b(t) e^{A(t)}$ . En particulier, si  $t = t_0$ ,

$$\Gamma(t_0) e^{-A(t_0)} + C e^{-A(t_0)} = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad C = y_0 e^{A(t_0)} - \Gamma(t_0).$$

Ainsi une seule valeur de  $C$  est possible pour définir  $y$  ce qui prouve l'unicité.

*Synthèse/Existence.* Posons pour tout  $t \in I$ ,

$$y(t) = \Gamma(t) e^{-A(t)} + C_0 e^{-A(t)},$$

avec

$$C_0 = y_0 e^{A(t_0)} - \Gamma(t_0).$$

D'après le théorème I.9, on sait que  $y$  est solution de  $(E)$ . Pour montrer que  $y$  est une solution du problème de Cauchy, il nous reste juste à vérifier que  $y(t_0) = y_0$ . Et en effet,

$$\begin{aligned} y(t_0) &= \Gamma(t_0) e^{-A(t_0)} + C_0 e^{-A(t_0)} \\ &= \Gamma(t_0) e^{-A(t_0)} + \left( y_0 e^{A(t_0)} - \Gamma(t_0) \right) e^{-A(t_0)} \\ &= \Gamma(t_0) e^{-A(t_0)} + y_0 - \Gamma(t_0) e^{-A(t_0)} \\ &= y_0. \end{aligned}$$

□

## I.7 Problème de raccord

On considère une équation différentielle linéaire d'ordre 1 non résolue en  $y'$  : soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  trois fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ . On considère alors l'équation d'inconnue  $y$  une fonction dérivable sur  $I$  telle que

$$\forall t \in I, \quad \alpha(t) y'(t) + \beta(t) y(t) = \gamma(t). \quad (E)$$

Supposons par exemple que  $I = [a; b]$  et que  $\alpha$  s'annule en un unique point de  $t_0 \in ]a; b[$  :

$$\alpha(t_0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in ]a; t_0[ \cup ]t_0; b[, \quad \alpha(t) \neq 0.$$

Puisque  $\alpha$  est non nulle sur l'INTERVALLE  $I_1 = ]a; t_0[$  ainsi que sur l'INTERVALLE  $I_2 = ]t_0; b[$ , l'équation  $(E)$  implique les deux équations différentielles suivantes.

$$\forall t \in I_1, \quad y'(t) + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} y(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} \quad (E_1)$$

$$\forall t \in I_2, \quad y'(t) + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} y(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} \quad (E_2)$$

Dans une démarche d'analyse/synthèse, pour déterminer les solutions de  $(E)$ , on fixe  $y$  une solution de  $(E)$ , on en déduit que  $y$  est une solution de  $(E_1)$  sur  $I_1$  et une solution de  $(E_2)$  sur  $I_2$ . On en déduit une écriture de  $y$  sur  $I_1$  (dont l'existence est assurée par le théorème I.6) et une écriture de  $y$  sur  $I_2$ . ATTENTION ! Les constantes qui apparaissent dans la résolution sur  $I_1$  ne sont pas les mêmes a priori que les constantes qui apparaissent dans la résolution sur  $I_2$ . Pour trouver une solution qui soit valable sur  $I$  tout entier, il faut regarder s'il est possible de jouer sur les constantes précédentes pour obtenir une fonction  $y$  qui soit dérivable sur  $I$  tout entier notamment il faut qu'elle soit continue en  $t_0$  donc que

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t < t_0}} y(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} y(t).$$

De même il faut que la limite du taux d'accroissement coïncide à gauche et à droite.

**Exemple 12 :** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle

$$(1-x)y' - y = x.$$

**Exemple 13 :** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle

$$xy' - 3y = x^4.$$

## II Equations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants

### II.1 Définition

#### Définition II.1

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$  tel que  $a \neq 0$  et  $d : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue sur  $I$ . On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** l'équation d'inconnue une fonction  $y$  de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ , deux fois dérivable sur  $I$  et telle que

$$\forall t \in I, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t). \quad (E)$$

On lui associe son **équation différentielle homogène** ou **sans second membre** qui est l'équation d'inconnue  $y$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ , deux fois dérivable sur  $I$  et telle que

$$\forall t \in I, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \quad (E_0)$$

#### Remarque 14 :

- Dans cette équation, le second membre est noté  $d$ .
- Puisque  $a \neq 0$ , il est toujours possible d'obtenir l'équation résolue en  $y''$  associé :

$$\forall t \in I, \quad y''(t) + \frac{b}{a}y'(t) + \frac{c}{a}y(t) = \frac{d(t)}{a},$$

et aucun problème de raccord ne se posera dans le cas d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants.

- L'équation différentielle est **d'ordre 2** car elle met en relation la fonction, sa dérivée première et sa dérivée seconde.

### II.2 Equations homogènes d'ordre 2

#### Proposition II.2

On reprend les notations de la définition II.1 et on note  $\mathcal{S}_0$  l'ensemble des solutions de l'équation homogène  $(E_0)$ . L'ensemble  $\mathcal{S}_0$  est un espace vectoriel :

- La fonction nulle est un élément de  $\mathcal{S}_0$ .
- L'espace  $\mathcal{S}_0$  est stable par combinaison linéaire : pour tout  $(y_1, y_2) \in \mathcal{S}_0^2$ , et tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ , on a

$$\lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathcal{S}_0.$$

**Démonstration.** On procède exactement de la même façon que pour la proposition I.2. Il est clair que la fonction nulle est solution de  $(E_0)$  (mais pas de  $(E)$ ). Montrons que  $\mathcal{S}_0$  est stable par combinaison linéaire. Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$  et  $(y_1, y_2) \in \mathcal{S}_0^2$ . Alors la fonction  $y = \lambda y_1 + \mu y_2$  est deux fois dérivable sur  $I$  et

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad y'(t) &= \lambda y_1'(t) + \mu y_2'(t) \\ y''(t) &= \lambda y_1''(t) + \mu y_2''(t). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad ay''(t) + by'(t) + c &= a(\lambda y_1''(t) + \mu y_2''(t)) + b(\lambda y_1'(t) + \mu y_2'(t)) + c(\lambda y_1(t) + \mu y_2(t)) \\ &= a\lambda y_1''(t) + a\mu y_2''(t) + b\lambda y_1'(t) + b\mu y_2'(t) + c\lambda y_1(t) + c\mu y_2(t) \\ &= \lambda(ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t)) + \mu(ay_2''(t) + by_2'(t) + cy_2(t)) \end{aligned}$$

Puisque  $y_1 \in \mathcal{S}_0$  et  $y_2 \in \mathcal{S}_0$ , on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$  et donc  $y \in \mathcal{S}_0$ .  $\square$

#### Définition II.3

On reprend les notations de la définition II.1. On appelle **équation caractéristique** associée à  $(E_0)$  l'équation du second degré

$$ar^2 + br + c = 0, \quad (E_c)$$

d'inconnu le complexe  $r \in \mathbb{C}$ .



**Lemme II.4**

On reprend les notations de la définition II.1. Soit  $r \in \mathbb{C}$ . La fonction  $y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ t & \mapsto e^{rt} \end{cases}$  est solution de l'équation homogène  $(E_0)$  si et seulement si  $r \in \mathbb{C}$  est solution de l'équation caractéristique  $(E_c)$  associée.

**Démonstration.** Soient  $r \in \mathbb{C}$  et  $y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ t & \mapsto e^{rt} \end{cases}$ . D'après un chapitre précédent, on sait que la fonction  $y$  est dérivable et que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $y'(t) = r e^{rt}$ . La fonction  $y$  est donc deux fois dérivable et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a également  $y''(t) = r^2 e^{rt}$ . Par conséquent en notant  $\mathcal{S}_0$  l'ensemble des solutions de  $(E_0)$ , on a :

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}_0 &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad ar^2 e^{rt} + br e^{rt} + ce^{rt} = 0 \end{aligned}$$

La fonction  $t \mapsto e^{rt}$  ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}$ , on obtient

$$y \in \mathcal{S}_0 \quad \Leftrightarrow \quad ar^2 + br + c = 0,$$

autrement dit  $y$  est solution de  $(E_0)$  si et seulement si  $r$  est une solution de  $(E_c)$ . □

**Théorème II.5 (Solutions complexes de  $(E_0)$ )**

On reprend les notations de la définition II.1 et on note  $\mathcal{S}_0(\mathbb{C})$  l'ensemble des solutions à valeurs dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $(E_0)$ .

- Si l'équation caractéristique  $(E_c)$  admet deux racines distinctes  $(r_1, r_2) \in \mathbb{C}^2$ ,  $r_1 \neq r_2$ , alors l'ensemble  $\mathcal{S}_0(\mathbb{C})$  est donné par

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \end{array} \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \left( \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t} \end{array} \right).$$

- Si l'équation caractéristique  $(E_c)$  admet une racine double  $r_0 \in \mathbb{C}$ , alors l'ensemble  $\mathcal{S}_0(\mathbb{C})$  est donné par

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto (At + B) e^{r_0 t} \end{array} \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \left( \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{r_0 t}, \end{array} \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto t e^{r_0 t} \end{array} \right).$$

**Remarque 15 :** Cette fois-ci, l'ensemble des solutions est construit ou *engendré* par la combinaison de deux solutions non-colinéaires et forme donc un *plan vectoriel*.

**Démonstration.** *Extrait pour la colle.* Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ ,  $a \neq 0$  et  $(E)$  l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  :

$$(E) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

Soit

- $(E_c) : ar^2 + br + c = 0$  l'équation caractéristique associée à  $(E)$ ,
- $r$  une solution/racine de  $(E_c)$
- $y$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$
- $z : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto y(t) e^{-rt} \end{array}$ .

La fonction  $z$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et montrons que

$$y \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad z' \text{ est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.}$$

Puisque pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $y(t) = z(t)e^{rt}$ , on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
 y \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \\
 &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, a(z(t)e^{rt})'' + b(z(t)e^{rt})' + c(z(t)e^{rt}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, a(z''(t)e^{rt} + 2z'(t)re^{rt} + z(t)r^2e^{rt}) + b(z'(t)e^{rt} + z(t)re^{rt}) + cz(t)e^{rt} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, z''(t)a e^{rt} + z'(t)(2ar + b)e^{rt} + z(t)(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, z''(t)a + z'(t)(2ar + b) + z(t)\underbrace{(ar^2 + br + c)}_{=0} = 0 \quad \text{car } e^{rt} \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, z''(t)a + z'(t)(2ar + b) = 0 \quad \text{car } r \text{ solution de } (E_c).
 \end{aligned}$$

Conclusion,  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $z$  est solution de

$$\forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + \left(2r + \frac{a}{b}\right)z'(t) = 0.$$

□

**Démonstration.** Montrons le premier point. Soient  $r_1$  et  $r_2$  les deux racines distinctes de l'équation caractéristique  $(E_c)$ .

Montrons que  $\mathcal{S}_0(\mathbb{C}) \subseteq \{t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2\}$ . Soit  $y \in \mathcal{S}_0(\mathbb{C})$  et posons

$$\begin{aligned}
 z &: I \rightarrow \mathbb{C} \\
 t &\mapsto y(t)e^{-r_1 t}.
 \end{aligned}$$

La fonction  $z$  est deux fois dérivable et pour tout  $t \in I$ ,  $y(t) = z(t)e^{r_1 t} \in \mathcal{S}_0(\mathbb{C})$ . Ainsi, pour tout  $t \in I$ ,

$$\begin{aligned}
 0 = ay''(t) + by'(t) + cy(t) &= a(z'(t)e^{r_1 t} + r_1 z(t)e^{r_1 t})' + bz'(t)e^{r_1 t} + br_1 z(t)e^{r_1 t} + cz(t)e^{r_1 t} \\
 &= a(z''(t)e^{r_1 t} + r_1 z'(t)e^{r_1 t} + r_1 z'(t)e^{r_1 t} + r_1^2 z(t)e^{r_1 t}) + bz'(t)e^{r_1 t} + br_1 z(t)e^{r_1 t} + cz(t)e^{r_1 t} \\
 &= az''(t)e^{r_1 t} + a2r_1 z'(t)e^{r_1 t} + ar_1^2 z(t)e^{r_1 t} + bz'(t)e^{r_1 t} + br_1 z(t)e^{r_1 t} + cz(t)e^{r_1 t}
 \end{aligned}$$

Puisque  $t \mapsto e^{r_1 t}$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ , pour tout  $t \in I$ ,

$$\begin{aligned}
 0 &= az''(t) + a2r_1 z'(t) + ar_1^2 z(t) + bz'(t) + br_1 z(t) + cz(t) \\
 &= az''(t) + (a2r_1 + b)z'(t) + \underbrace{(ar_1^2 + br_1 + c)}_{=0}z(t) \quad \text{car } r_1 \text{ solution de } (E_c). \\
 &= az''(t) + (a2r_1 + b)z'(t).
 \end{aligned}$$

On en déduit que  $z'$  est solution de l'équation différentiel homogène d'ordre 1 suivante :

$$\forall t \in I, \quad z''(t) + \alpha z'(t) = 0,$$

avec  $\alpha = \frac{a2r_1 + b}{a}$ . Puisque  $r_1$  et  $r_2$  sont solutions de l'équation  $ar^2 + br + c = 0$ , on sait que  $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ . Donc  $\alpha = 2r_1 + \frac{b}{a} = 2r_1 - (r_1 + r_2) = r_1 - r_2$ . Donc d'après le théorème I.4 (ou directement le corollaire I.5), il existe  $A_0 \in \mathbb{C}$  telle que

$$\forall t \in I, \quad z'(t) = A_0 e^{-\alpha t} = A_0 e^{-(r_1 - r_2)t}.$$

Puisque  $r_1 \neq r_2$ , la fonction  $t \mapsto A e^{-(r_1 - r_2)t}$  avec  $A = \frac{A_0}{r_1 - r_2} \in \mathbb{C}$  est une primitive de  $z$  sur  $I$ . Donc il existe  $B \in \mathbb{C}$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad z(t) = A e^{-(r_1 - r_2)t} + B.$$

Finalement, on en déduit qu'il existe  $(A, B) \in \mathbb{C}^2$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad y(t) = z(t)e^{r_1 t} = A e^{r_2 t} + B e^{r_1 t}.$$

Donc  $y \in \{t \mapsto A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2\}$  et donc  $\mathcal{S}_0(\mathbb{C}) \subseteq \{t \mapsto A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2\}$ .

Réciproquement, d'après le lemme précédent, on sait que  $t \mapsto e^{r_1 t}$  et  $t \mapsto e^{r_2 t}$  sont solutions de  $(E_0)$  sur  $I$ . Or  $\mathcal{S}_0(\mathbb{C})$  est stable par combinaison linéaire (voir la proposition II.2). Donc pour tout  $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ , la fonction  $t \mapsto A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$  est solution de  $(E_0)$  sur  $I$ . Donc  $\{t \mapsto A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2\} \subseteq \mathcal{S}_0(\mathbb{C})$ .

Conclusion :  $\mathcal{S}_0(\mathbb{C}) = \{t \mapsto A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2\}$ .

Le second point se démontre de la même façon et est laissé en exercice.

□

**Exemple 16 :** Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble des solutions complexes de l'équation différentielle.

1.  $y'' + 3y' - 4y = 0$
2.  $y'' + y' + y = 0$
3.  $y'' + (1 - i)y' + (4 + 7i)y = 0$
4.  $y'' + 2y' + y = 0$ .

### Théorème II.6 (Solutions réelles de $(E_0)$ )

On reprend les notations de la définition II.1. On suppose que les constantes  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont **réelles** et on note  $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$  l'ensemble des solutions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $(E_0)$ . On note  $\Delta = b^2 - 4ac$  le discriminant de l'équation caractéristique

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (E_c)$$

- Si  $\Delta > 0$ , on note  $r_1$  et  $r_2$  les deux racines réelles de  $(E_c)$ . Alors les solutions réelles de  $(E_0)$  sont données par

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \end{array} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left( \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{r_1 t} \end{array}, \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{r_2 t} \end{array} \right).$$

- Si  $\Delta = 0$ , on note  $r_0$  la solution double de  $(E_c)$ . Alors les solutions réelles de  $(E_0)$  sont données par

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (At + B) e^{r_0 t} \end{array} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left( \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{r_0 t} \end{array}, \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t e^{r_0 t} \end{array} \right).$$

- Si  $\Delta < 0$ , on note  $\alpha + i\beta$  et  $\alpha - i\beta$  les deux solutions de  $(E_c)$ , c'est-à-dire  $\alpha = \frac{-b}{2a}$  et  $\beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ . Alors les solutions réelles de  $(E_0)$  sont données par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)) \end{array} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left( \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\beta t) \end{array}, \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \right). \end{aligned}$$

### Démonstration.

- On suppose  $\Delta > 0$  et on note  $r_1$  et  $r_2 \in \mathbb{R}$  les deux racines réelles de  $(E_c)$ . Soit  $y \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$  alors  $y \in \mathcal{S}_0(\mathbb{C})$ , donc d'après le théorème II.5, il existe  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  deux constantes dans  $\mathbb{C}$ ,  $\tilde{A} = A + i\hat{A}$  et  $\tilde{B} = B + i\hat{B}$ , où  $A$ ,  $\hat{A}$ ,  $B$  et  $\hat{B}$  sont des réels, telles que pour tout  $t \in I$ ,

$$y(t) = \tilde{A} e^{r_1 t} + \tilde{B} e^{r_2 t} = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} + i(\hat{A} e^{r_1 t} + \hat{B} e^{r_2 t}).$$

Or par hypothèse, la fonction  $y$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Donc,

$$\forall t \in I, \quad \hat{A} e^{r_1 t} + \hat{B} e^{r_2 t} = 0.$$

et donc

$$\forall t \in I, \quad y(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}.$$

Ainsi  $y \in \{t \mapsto A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$ . D'où

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}) \subseteq \{t \mapsto A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Réciproquement il est clair que

$$\{t \mapsto A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \{t \mapsto A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2\} = \mathcal{S}_0(\mathbb{C}).$$

Donc pour tout  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ , la fonction  $y : t \mapsto A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$  est une solution de  $(E_0)$ . La fonction  $y$  étant aussi à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $y \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$  et donc

$$\{t \mapsto A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathcal{S}_0(\mathbb{R}).$$

En conclusion  $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}) = \{t \mapsto A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$ .

- On suppose  $\Delta = 0$ . On note  $r_0 \in \mathbb{R}$  la racine réelle double de l'équation caractéristique  $(E_c)$ . Soit  $y \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}_0(\mathbb{C})$ . D'après le théorème II.5, il existe deux constantes  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $\tilde{A} = A + i\hat{A}$ ,  $\tilde{B} = B + i\hat{B}$ , avec  $A, \hat{A}, B, \hat{B} \in \mathbb{R}$ , telles que

$$\forall t \in I, \quad y(t) = (\tilde{A}t + \tilde{B}) e^{r_0 t} = (At + B) e^{r_0 t} + i(\hat{A}t + \hat{B}) e^{r_0 t}.$$

Puisque  $\forall t \in I, y(t) \in \mathbb{R}$ , on en déduit que  $\forall t \in I, (\hat{A}t + \hat{B}) e^{r_0 t} = 0$  et donc  $\forall t \in I, y(t) = (At + B) e^{r_0 t}$ . Donc  $y \in \{t \mapsto (At + B) e^{r_0 t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$  et ainsi  $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}) \subseteq \{t \mapsto (At + B) e^{r_0 t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$ .

Réciproquement, on sait d'après le théorème II.5 que  $t \mapsto (At + B) e^{r_0 t}$  est une solution de  $(E_0)$ . Cette solution étant à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on en déduit que  $\{t \mapsto (At + B) e^{r_0 t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ .

Conclusion  $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}) = \{t \mapsto (At + B) e^{r_0 t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$ .

- Sous votre lecture attentive, traitons le troisième et dernier cas : si  $\Delta < 0$ .

Notons  $r_1 = \alpha + i\beta$  et  $r_2 = \alpha - i\beta$  les deux racines complexes distinctes de  $(E_c)$ . Soit  $y \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}_0(\mathbb{C})$ . D'après le théorème II.5, il existe  $\tilde{A} = \tilde{A}_1 + i\tilde{A}_2$  et  $\tilde{B} = \tilde{B}_1 + i\tilde{B}_2$ , avec  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2 \in \mathbb{R}$ , telles que

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad y(t) &= \tilde{A} e^{r_1 t} + \tilde{B} e^{r_2 t} \\ &= \tilde{A} e^{\alpha t} e^{i\beta t} + \tilde{B} e^{\alpha t} e^{-i\beta t}. \end{aligned}$$



La fonction  $y$  étant à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on en déduit que  $\forall t \in I, y(t) = \text{Re}(y(t))$  id est

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad y(t) &= \tilde{A}_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) - \tilde{A}_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) + \tilde{B}_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \tilde{B}_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ &= A e^{\alpha t} \cos(\beta t) + B e^{\alpha t} \sin(\beta t), \end{aligned}$$

avec  $A = \tilde{A}_1 + \tilde{B}_1 \in \mathbb{R}$  et  $B = \tilde{B}_2 - \tilde{A}_2 \in \mathbb{R}$ . Donc  $y \in \{t \mapsto e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$ . Ainsi, on a montré que  $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}) \subseteq \{t \mapsto e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$ .

Réciproquement, si  $y \in \{t \mapsto e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$ , alors il existe  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\begin{aligned} \forall t \in I, y(t) &= e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)) \\ &= e^{\alpha t} \left( A \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} + B \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} \right) \\ &= \left( \frac{A}{2} + \frac{B}{2i} \right) e^{\alpha t + i\beta t} + \left( \frac{A}{2} - \frac{B}{2i} \right) e^{\alpha t - i\beta t} \\ &= \tilde{A} e^{r_1 t} + \tilde{B} e^{r_2 t}, \end{aligned}$$

avec  $\tilde{A} = \frac{A}{2} + \frac{B}{2i} \in \mathbb{C}$ ,  $\tilde{B} = \frac{A}{2} - \frac{B}{2i} \in \mathbb{C}$  deux constantes complexes et  $r_1 = \alpha + i\beta$  et  $r_2 = \alpha - i\beta$  les deux solutions de  $(E_c)$ . Donc, d'après le théorème de II.5,  $y \in \mathcal{S}_0(\mathbb{C})$ . Or par définition de  $y$ , la fonction est à valeurs dans  $\mathbb{R}$  donc  $y \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$  et on a montré que  $\{t \mapsto e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ .

Conclusion :  $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}) = \{t \mapsto e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$ . □

### II.3 Equations d'ordre 2 avec second membre

#### Théorème II.7

On reprend les notations de la définition II.1 et on note  $\mathcal{S}_0$  l'ensemble des solutions de  $(E_0)$  et  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de  $(E)$ . Si  $(E)$  admet une solution et si  $y_p$  est une solution de  $(E)$ , alors

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 = \{y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathcal{S}_0\}.$$

**Proposition II.8 (Principe de superposition)**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois complexes fixés et  $d_1$  et  $d_2$  deux fonctions continues sur  $I$ . On considère les équations suivantes, d'inconnue  $y$  une fonction deux fois dérivable sur  $I$  :

$$\forall t \in I, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = b_1(t) \quad (E_1)$$

$$\forall t \in I, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = b_2(t) \quad (E_2)$$

$$\forall t \in I, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = b_1(t) + b_2(t). \quad (E)$$

Soient  $y_1$  une solution de  $(E_1)$  et  $y_2$  une solution de  $(E_2)$ . Alors la fonction  $y = y_1 + y_2$  est une solution de  $(E)$ .

**Proposition II.9**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a$ ,  $b$ ,  $c$  trois réels. Si  $d : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue sur  $I$  et si  $y : I \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction deux fois dérivable telle que

$$\forall t \in I, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t),$$

alors la fonction  $y_1 = \operatorname{Re}(y) : I \rightarrow \mathbb{R}$  est solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t) = \operatorname{Re}(d)(t),$$

et la fonction  $y_2 = \operatorname{Im}(y) : I \rightarrow \mathbb{R}$  est solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad ay_2''(t) + by_2'(t) + cy_2(t) = \operatorname{Im}(d)(t),$$

## II.4 Recherche d'une solution particulière

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ ,  $a \neq 0$ . On s'intéresse à l'équation différentielle d'ordre 2 d'inconnue  $y$  une fonction deux fois dérivable sur  $I$  :

$$\forall x \in I, \quad ay'' + by' + cy = P(x)e^{mx}, \quad (E)$$

où  $P$  est un polynôme et  $m \in \mathbb{K}$ . Alors on cherche une solution de  $(E)$  sous la forme

- $x \mapsto Q(x)e^{mx}$  si  $m$  n'est pas une racine de l'équation caractéristique  $(E_c)$
- $x \mapsto xQ(x)e^{mx}$  si  $m$  est une racine simple de l'équation caractéristique  $(E_c)$
- $x \mapsto x^2Q(x)e^{mx}$  si  $m$  est une racine double de l'équation caractéristique  $(E_c)$

avec  $Q$  un polynôme de même degré que  $P$ .

A nouveau dans le cas d'une fonction trigonométrique au second membre on cherchera ou bien une solution trigonométrique évidente ou l'on transformera la fonction en exponentielle.

**Exemple 17 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes.

1.  $y'' + y' + y = e^t + t$
2.  $y'' - 4y' + 3y = (2t + 1)e^t$
3.  $y'' - 2y' + y = (t - 1)e^t$
4.  $y'' - 4y' + 3y = te^t \cos(t)$

## II.5 Résolution avec condition initiale

**Définition II.10**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ ,  $a \neq 0$ ,  $d : I \rightarrow \mathbb{K}$ , une fonction continue sur  $I$ ,  $t_0 \in I$  et  $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$ . On appelle **problème de Cauchy** l'équation suivante d'inconnue  $y$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{K}$  deux fois dérivable sur  $I$ ,

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t), & \forall t \in I, \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

**Théorème II.11 (admis)**

Pour tout  $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K}^2$ , le problème de Cauchy admet une unique solution.

**Remarque 18 :** Notez que toute fonction de  $\mathcal{S}_0$  est construite à partir de deux constantes (cf théorème II.5). On dira que c'est un espace vectoriel de dimension 2. L'ensemble des solutions  $\mathcal{S}$  sera par suite un espace affine de dimension 2. Cela rejoint au moins intuitivement le fait qu'il faille deux conditions initiales : position  $y(t_0)$  et vitesse  $y'(t_0)$  pour obtenir l'unicité de la solution.

### III Prochainement... Espaces vectoriels

#### Définition III.1

Soient  $E$  un ensemble,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x, u_1, u_2, \dots, u_n \in E$  des éléments de  $E$ . On dit que  $x$  est **une combinaison linéaire** de  $u_1, \dots, u_n$  s'il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k.$$

#### Pseudo-définition III.2

Soit  $E$  un ensemble. On dit que  $E$  est un espace vectoriel s'il est stable par combinaisons linéaires.

**Remarque 19 :**

- Les éléments de  $\mathbb{K}$  (des réels ou des complexes) sont appelés des **scalaires**.
- Les éléments de  $E$  sont appelés des **vecteurs** même si ce ne sont pas des vecteurs au sens géométrique que vous avez appris au lycée, si  $E$  est un ensemble de fonctions, les vecteurs sont donc des fonctions. Ils peuvent être aussi des polynômes, des complexes, des matrices etc.

**Exemple 20 : classique à connaître.**

- $\mathbb{R}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'ensemble des  $n$ -uplet  $\mathbb{K}^n$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- Pour tout  $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , l'ensemble des matrices  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- $\mathbb{C}$  peut être vu comme un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel mais aussi en tant qu'ensemble de couples de réels comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- L'ensemble des suites  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- Pour  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , l'ensemble  $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Exemple 21 :**

1. Dans  $\mathbb{R}^3$ , tout vecteur  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$ . En effet :

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

2. Tout complexe  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des complexes 1 et  $i$  :

$$z = a \cdot 1 + b \cdot i.$$

3. Dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , la fonction sh est combinaison linéaire de  $f_1 : x \mapsto e^x$  et  $f_2 : x \mapsto e^{-x}$  :

$$\text{sh} = \frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{2}f_2.$$

#### Proposition III.3 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un ensemble.  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $F$  vérifie les trois propositions suivantes :

1.  $F \subseteq E$
2.  $0_E \in F$
3.  $F$  est stable par combinaisons linéaires :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F.$$

**Exemple 22 : A connaitre.**

1. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . L'ensemble des fonctions continues  $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ .
2. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ .
3. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire **homogène** d'ordre 1 (respectivement 2) est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions dérivables (respectivement deux fois dérivables) lui-même étant un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions.
4. L'ensemble des solutions d'un système **homogène** de  $p$  équations à  $n$  inconnues est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

**BERNOULLI Jakob** (francisée en Jacques) (Bâle 1654 - Bâle 1705) fut le premier d'une lignée de mathématiciens suisses d'origine anversoise. Sur les conseils de son père, Jacques Bernoulli commença par étudier la théologie avant de se tourner rapidement vers l'astronomie, les mathématiques et la physique, contre l'avis de son père. Il voyagea en France, en Angleterre et en Flandres, y rencontra les scientifiques de renom de l'époque puis revint en Suisse en 1687 et y développa les nombreux travaux qu'on lui connaît. Il fut en relation avec Leibniz et contribua à l'essor du calcul infinitésimal. Il sut notamment l'appliquer à l'étude des courbes. Il fut le premier à utiliser les coordonnées polaires et sut les dériver. Il travailla sur les coniques, les problèmes isopérimétriques, les séries (cf second semestre pour nous) et les probabilités.



Une équation de Bernoulli est une équation différentielle du type  $y' + a(x)y + b(x)y^\alpha = 0$  qui fut résolue par Leibniz. L'inégalité de Bernoulli est celle qui pour tout  $x > -1$  et tout  $n > 1$  affirme que  $(1+x)^n > 1+nx$ . Fasciné par la spirale logarithmique qu'il surnommait *spira mirabilis*, il souhaita que l'on en grave une sur sa tombe accompagné de *Eadem mutata resurgo* ce qui signifie je renais changé en moi-même. Mais le graveur, mauvais mathématicien, dessina une spirale d'Archimède...

Tout le monde connaît l'aspect hautain de la fonction  $x \mapsto e^x$  qui se moque de ses compères  $x \mapsto x$ ,  $x \mapsto \ln(x)$ ,  $x \mapsto \cos(x)$  ou  $x \mapsto \sin(x)$ . Mais la vengeance des fonctions trigonométriques est moins connue. Voici ce qui se passa. Les fonctions  $x \mapsto e^x$ ,  $x \mapsto \sin(x)$  et  $x \mapsto \cos(x)$  jouaient régulièrement au poker, mais la fonction exponentielle, mauvaise joueuse, dès qu'elle sentait la partie en sa défaveur lâchait son gros chien  $\frac{d}{dx}$  sur sinus et cosinus « Attaque, désurdéics! Attaque! ». Les deux fonctions pour ne pas perdre la face, en particulier le cosinus qui avait tendance à devenir négatif dans ce cas de figure, devaient fuir à toute vitesse. Plus exactement sinus sautait sur le dos de cosinus et les deux fonctions prenaient alors la tangente devant  $x \mapsto e^x$  qui se Gaussait bien d'eux... Mais les fonctions trigonométriques sont bornées et ne désespéraient pas de pouvoir prendre leur revanche. Après une longue période les deux fonctions furent en phase (ce qui n'est pas courant) et livrèrent une grosse cage à  $x \mapsto e^x$  avec marqué dessus : « voici un compagnon pour désurdéics ». Avec une curiosité croissante (et rapidement),  $x \mapsto e^x$  ouvrit la cage et découvrit un gros chien très similaire à désurdéics sauf que ce dernier portait un collier où son nom apparaissait : désurdéigrec. La fonction  $x \mapsto e^x$  eu juste le temps de pousser un soupir prophétique « oh non c'est trop nul! ». Moralité : il ne faut jamais laisser dériver son orgueil car nous sommes tous la constante d'un opérateur.