Fiche de révisions : ensembles et applications

I Le cours

1. Enoncer la distribution de l'intersection sur l'union et réciproquement.
2. Enoncer les lois de Morgan pour les ensembles.
3. Définir l'ensemble image et l'ensemble réciproque.
4. Définir l'injectivité et la surjectivité.
5. Caractériser la bijectivité d'une fonction par l'existence d'un inverse

II Les savoir-faire

1. Montrer l'égalité de deux ensembles $A = B$. Deux méthodes. *Méthode 1, par équivalences.* Soit $x \in E$. On a $x \in A \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in B$.
   Méthode 2, par double inclusion. Montrer $A \subseteq B$. Soit $x \in A$. Alors $\ldots$ et donc $x \in B$. Donc $A \subseteq B$. Réciproquement montrer que $B \subseteq A$. Soit $x \in B$, $\ldots$, donc $x \in A$. Donc $B \subseteq A$. On conclut alors $A = B$.
2. Montrer qu'une fonction est injective. On fixe $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. On cherche alors à montrer que $x = x'$.
3. Montrer qu'une fonction est surjective. On fixe $y \in F$. On cherche alors à trouver un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
4. Montrer qu'une fonction est bijective. *Méthode 1.* On montre que f est injective et surjective.
   Méthode 2. On montre qu'il existe $g \in \mathscr{F}(F, E)$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
   Méthode 3. On fixe $x \in E$ et $y \in F$ tel que $y = f(x)$ et on montre par équivalences que $x = g(y)$. Alors f est bijective et de plus $f^{-1} = g$.

III Les erreurs à éviter

1. Ne pas confondre f, $f(x)$ et $f(A)$. Le premier est une fonction, le second un nombre (ou un élément) et le troisième un ensemble. Notamment $f(x)$ et $f(\{x\})$ ne sont pas les mêmes objets.
2. Ne pas confondre $f^{-1}(B)$ (ensemble) qui existe toujours, pour tout ensemble $B \in \mathscr{P}(F)$ avec f^{-1} (fonction réciproque) qui n'existe QUE si f est bijective.
3. Rester attentif aux ensembles et savoir quelle fonction est définie sur quel ensemble pour savoir laquelle on a le droit d'appliquer.
4. Bien écrire toujours les définitions au démarrage et bien écrire aussi son objectif. Avancer étape par étape en déroulant les définitions.

IV Les réponses du cours

1. Soient E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$. Alors,
   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. Soient E un ensemble et $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Les lois de Morgan sont :
   - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
3. Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$. Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$. Alors,
$$f(A) = \{ y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \}$$
$$f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \}.$$
4. Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$.
$$\begin{array}{rcl} f \text{ est injective} & \Leftrightarrow & \forall (x, y) \in E^2,\ (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y). \\ f \text{ est surjective} & \Leftrightarrow & \forall y \in F,\ \exists x \in E, \quad y = f(x). \end{array}$$
5. Soient E, F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$. La fonction f est bijective si et seulement s'il existe $g \in \mathscr{F}(F, E)$ telle que
$$f \circ g = \mathrm{Id}_F \qquad \text{et} \qquad g \circ f = \mathrm{Id}_E.$$
   De plus dans ce cas, $g = f^{-1}$.