Fiche de révisions : continuité et dérivabilité

I Le cours

1. Définir $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ lorsque $(a,l) \in \mathbb{R}^2$, $(a,l) \in \mathbb{R} \times \{+\infty\}$, $(a,l) \in \{+\infty\} \times \mathbb{R}$, $(a,l) \in \{+\infty\}^2$.
2. Enoncer le théorème d'encadrement.
3. Enoncer le théorème de convergence monotone.
4. Enoncer la caractérisation séquentielle de la limite.
5. Définir une fonction continue en a.
6. Enoncer la caractérisation séquentielle de la continuité.
7. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
8. Enoncer le théorème donnant l'image d'un intervalle...
9. Enoncer le théorème des bornes atteintes.
10. Enoncer le théorème de la bijection.
11. Définir une fonction dérivable en a.
12. Définir une fonction $\mathscr{C}^n$.
13. Enoncer la formule de Leibniz.
14. Enoncer l'identité des accroissements finis.
15. Enoncer le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.

II Les savoir-faire

1. Savoir appliquer la définition d'une limite.
2. Savoir montrer qu'une fonction est continue en montrant que ses limites à droite, à gauche et $f(a)$ coïncident.
3. Savoir montrer qu'une fonction est dérivable en calculant la limite du taux d'accroissement.
4. Savoir appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.
5. Savoir appliquer le théorème de la bijection.
6. Savoir invoquer le théorème d'encadrement ou de la convergence monotone pour montrer qu'une limite existe.
7. Penser au théorème des bornes atteintes pour montrer qu'une fonction est bornée ou admet un maximum ou un minimum.
8. Savoir calculer une dérivée n-ième par la formule de Leibniz.
9. Savoir utiliser l'identité des accroissements finis pour relier f à f'.
10. Savoir montrer qu'une fonction est lipschitzienne.
11. Savoir montrer qu'une fonction est $\mathscr{C}^1$ par la définition ou par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.

III Les erreurs à éviter

1. Ne pas intervertir les quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Lorsque $\exists \eta$ a déjà été utilisé, bien considéré que le η est fixé et ne pas utiliser la même variable par la suite.
2. Ne JAMAIS, JAMAIS, JAMAIS passer à la limite sur un morceau. JAMAIS !
3. TOUJOURS passer aux inégalités larges lorsque l'on passe à la limite.
4. Pour qu'une limite existe, si $f(a)$ existe, bien vérifier que les limites à droite et à gauche coïncident avec $f(a)$.
5. Bien citer toutes les hypothèses et seulement les hypothèses nécessaires avant de citer un théorème puis de l'appliquer.
6. Il faut parfois définir une nouvelle fonction φ sur laquelle on applique le théorème, ce n'est pas toujours avec la fonction f de base qu'il faut travailler.
7. Ne pas confondre le TVI avec le théorème de la bijection (et ne pas utiliser d'abréviation...)

IV Les réponses du cours

1. Si $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$, alors,
$$\lim_{x \to a} f(x) = l \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in [a-\eta; a+\eta]\,, \quad |f(x) - l| \leqslant \varepsilon\,.$$
Si $a \in \mathbb{R}$ et $l = +\infty$, alors,
$$\lim_{x \to a} f(x) = l \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in [a-\eta; a+\eta]\,, \quad f(x) \geqslant M.$$
Si $a = +\infty$ et $l \in \mathbb{R}$, alors,
$$\lim_{x \to a} f(x) = l \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in [A; +\infty[\,, \quad |f(x) - l| \leqslant \varepsilon\,.$$
Si $a = +\infty$ et $l = +\infty$, alors,
$$\lim_{x \to a} f(x) = l \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in [A; +\infty[\,, \quad f(x) \geqslant M.$$
Définir $\lim_{x \to a} f(x) = l$ lorsque $(a, l) \in \mathbb{R}^2$, $(a, l) \in \mathbb{R} \times \{+\infty\}$, $(a, l) \in \{+\infty\} \times \mathbb{R}$, $(a, l) \in \{+\infty\}^2$.
2. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, f, g et h trois éléments de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On suppose que
   - pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$,
   - il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l$.

   Alors on a également $\lim_{x \to a} f(x) = l$.
3. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a = \inf I$, $b = \sup I$ et f une fonction définie sur I. Si f est croissante sur I alors deux cas sont possibles en b :
   - f est majorée sur I alors f converge vers un réel fixé en b (et ce réel vaut $\sup_{x \in I} f(x)$).
   - f n'est pas majorée sur I et alors f diverge vers $+\infty$ en b.

   De même, deux cas sont possibles en a :
   - f est minorée sur I alors f converge vers un réel fixé en a (et ce réel vaut $\inf_{x \in I} f(x)$).
   - f n'est pas minorée sur I et alors f diverge vers $-\infty$ en a.
4. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, f une fonction définie sur I et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On a l'équivalence suivante :
$$\lim_{x \to a} f(x) = l \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[\forall (u_n) \in I^{\mathbb{N}},\ \text{si } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } a \text{ alors } (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } l.\right]$$
5. Soient I un intervalle, f une fonction définie sur I et $a \in I$. On dit que f est continue en a si et seulement si
$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ existe et vaut } f(a).$$
6. Soient I un intervalle, f une fonction définie sur I et $a \in I$.. On a l'équivalence suivante :
$$f \text{ est continue en } a \ \Leftrightarrow\ \left[\forall (u_n) \in I^{\mathbb{N}},\ \text{si } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } a \text{ alors } (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } f(a).\right]$$
7. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leqslant b$, f une fonction définie sur $[a; b]$ et $y \in \mathbb{R}$. Si
   - f est continue sur $[a; b]$,
   - $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ ou $f(b) \leqslant y \leqslant f(a)$.

   Alors,
$$\exists c \in [a; b]\,, \qquad y = f(c).$$
8. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I, alors $J = f(I)$ est un intervalle.
9. Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes : soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et f une fonction continue sur le segment $I = [a; b]$. Alors
   - f est bornée sur $[a; b]$,
   - et atteint ses bornes : il existe $(\alpha, \beta) \in I^2$ tel que $f(\alpha) = m = \inf_{x \in I} f(x)$ et $f(\beta) = M = \sup_{x \in I} f(x)$.
   - Autrement dit $f(I) = [m; M]$.
10. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. Si

- f est continue sur I,
- strictement monotone sur I,

alors

- $J = f(I)$ est un intervalle « de la même forme » que I (ex : $\left[f(a); \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$ si $I = [a;b[$ et f strictement croissante)
- f définit une bijection de I dans J,
- f^{-1} est continue sur J,
- f^{-1} est strictement monotone sur J de même monotonie que f.

11. Soient $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a et f une fonction définie sur I. On dit que f est dérivable en a si et seulement si
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
12. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a et f une fonction définie sur I. On dit que f est $\mathscr{C}^n$ en a si et seulement si f est n fois dérivable en a et si $f^{(n)}$ est continue en a.
13. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions n fois dérivable sur I. Alors le produit fg est n fois dérivable sur I et
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$
14. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f une fonction définie sur $[a;b]$. Si
    - f est continue sur $[a;b]$,
    - f dérivable sur $]a;b[$.

    Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$
15. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et f une fonction définie sur I. Si
    - f est continue sur I,
    - f est $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$
    - $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

    Alors, f est $\mathscr{C}^1$ en a.