Fiche de révisions : suites numériques

I Le cours

1. Définir une suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique. Donner une expression explicite d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique. Rappeler la convergence d'une suite géométrique et la valeur d'une somme géométrique.
2. Donner l'expression explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dans le cas réel et dans le cas complexe.
3. Définir une suite croissante, décroissante, strictement croissante, strictement décroissante.
4. Définir une suite convergente.
5. Donner le lien entre convergence et bornitude.
6. Enoncer le théorème d'encadrement.
7. Enoncer le théorème de convergence monotone.
8. Donner la définition d'une suite extraite. Propriété ? Réciproque ?
9. Définir deux suites adjacentes. Propriété ?

II Les savoir-faire

Se reporter à la fiche méthode pour plus de détails

1. Reconnaître une suite classique.
2. Savoir montrer qu'une suite est bien définie.
3. Etudier sa monotonie.
4. Etudier sa bornitude.
5. Etudier sa convergence (théorème d'encadrement, théorème de convergence monotone).
6. Savoir déterminer sa limite / savoir passer à la limite dans des égalités/inégalités.
7. Savoir calculer un DL ou un équivalent pour obtenir la limite.

III Les erreurs à éviter

1. Ne JAMAIS, JAMAIS, JAMAIS passer à la limite sur un morceau. JAMAIS !
2. TOUJOURS passer aux inégalités larges lorsque l'on passe à la limite.
3. Si la suite est croissante et majorée par 1 par exemple, ne pas croire que la suite converge vers 1 (elle converge certes mais sa limite n'est pas une conséquence du théorème de convergence monotone en général).
4. Ne pas confondre les suites implicites, explicites et récurrentes.
5. Ne pas confondre les suites arithmético-géométrique et les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
6. Ne pas confondre le résultat sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 avec celui sur les équations différentielles d'ordre 2 (dans le cas $\Delta < 0$, on cherche le module et l'argument pour les suites alors que l'on cherche les parties réelle et imaginaires pour les fonctions)
7. Faire un dessin (même approximatif) pour les suites récurrentes voire aussi pour les suites implicites.

IV Les réponses du cours

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
   - On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Dans ce cas, $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant m$, $u_n = u_m + (n-m)\,r$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
   - On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$. Dans ce cas, $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant m$, $u_n = q^{n-m} u_m$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.
   - On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique si et seulement s'il existe $(r, q) \in \mathbb{K}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n + r$.

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ géométrique de raison $q \in \mathbb{K}$. Alors,
   $$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |q| < 1.$$
   Si $q = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1. Dans les autres cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   $$\forall q \in \mathbb{K} \setminus \{1\},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=m}^{n} q^k = q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1-q}.$$

2. Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Soit Δ le discriminant de $(E_c) : r^2 - ar - b$.
   Cas réel : si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   - Si $\Delta > 0$, alors en notant r_1 et r_2 les deux racines de (E_c),
   $$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \lambda\, r_1^n + \mu r_2^n.$$
   - Si $\Delta = 0$, alors en notant r_0 l'unique racine de (E_c),
   $$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (\lambda + \mu n)\, r_0^n.$$
   - Si $\Delta < 0$, alors en notant $r_1 = r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$ et $r_2 = r\,\mathrm{e}^{-i\,\theta}$ les deux racines complexes de (E_c),
   $$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = r^n \left(\lambda \cos(n\,\theta) + \mu \sin(n\,\theta)\right).$$

   Cas complexe : si $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.
   - Si $\Delta \neq 0$, alors en notant r_1 et r_2 les deux racines complexes de (E_c),
   $$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \lambda\, r_1^n + \mu r_2^n.$$
   - Si $\Delta = 0$, alors en notant r_0 l'unique racine complexe de (E_c),
   $$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (\lambda + \mu n)\, r_0^n.$$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a les équivalences suivantes :
   $$\begin{aligned}
   (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n\\
   (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n\\
   (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n\\
   (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n.
   \end{aligned}$$

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si
   $$\exists \ell \in \mathbb{K},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\,.$$

5. Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge alors nécessairement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est bornée : $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

6. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites **réelles**.
   - Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
   - et si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et vers la même limite ℓ,

alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également et vers cette limite ℓ.

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **réelle**. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée alors *(poing sur la table)* elle converge de plus sa limite vaut
$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\left\{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$. *On s'adapte pour une suite décroissante et minorée avec la borne inférieure.*
8. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Si φ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$ alors la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite ou encore une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ également et vers la même limite.
   - La réciproque est fausse en générale, cependant, si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et vers la même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers cette limite ℓ.
9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si
   - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
   - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
   - $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Deux suites adjacentes convergent et vers la même limite.