Fiche de révisions : polynômes

I Le cours

1. Définir le degré d'un polynôme. Propriétés du degré de la somme, du produit, de la composée ?
2. Définir le polynôme dérivé.
3. Préciser $\left(X^k\right)^{(r)}$.
4. Enoncer la formule de Leibniz pour les polynômes.
5. Enoncer les deux formules de Taylor pour les polynômes.
6. Enoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
7. Définir et caractériser une racine.
8. Définir une racine de multiplicité m.
9. Caractériser la multiplicité à l'aide des dérivées.
10. Définir un polynôme irréductible.
11. Définir un polynôme scindé.
12. Enoncer le théorème de d'Alembert-Gauss. Quelle est le lien entre le degré et les racines d'un polynôme ?
13. Enoncer le théorème de décomposition en produit de facteurs premiers dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
14. Enoncer la proposition reliant les racines et les coefficients d'un polynôme.

II Les savoir-faire

1. Savoir déterminer un degré ou une majoration de celui-ci.
2. Savoir développer le produit de deux polynômes.
3. Savoir évaluer un polynôme en un réel, une matrice, une fonction, un polynôme.
4. Savoir dériver une ou plusieurs fois un polynôme de façon théorique.
5. Savoir résoudre une équation polynomiale :
   - Etape 1 : on cherche le degré de P.
   - Etape 2 : si l'étape 1 a échoué, raisonner sur le terme dominant.
   - Etape 3 : partir en brute sur $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

   Dans certains cas, raisonner sur les racines.
6. Savoir faire une division euclidienne : en la posant ou par la méthode Horner lorsque le diviseur est $X - \alpha$.
7. Savoir factoriser par la recherche de racines « évidentes »
8. Déterminer la multiplicité d'une racine.
9. Montrer qu'un polynôme a plus de racines que son degré pour montrer qu'il est nul.

III Les erreurs à éviter

1. Penser au cas particulier de $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ notamment pour son degré $\deg(P) = -\infty$.
2. Ne jamais croire que X est un réel ou un complexe, c'est L'indéterminé des polynômes.
3. Ne jamais diviser par un polynôme ni n'écrire de puissance négative de P.
4. Toujours avoir un oeil sur le degré pour compter les racines du polynôme (avec multiplicité !)

IV Les réponses du cours

1. Pour tout $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on pose
$$\deg(P) = \begin{cases} \max\{\, k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0 \,\} & \text{si } P \neq 0_{\mathbb{K}[X]} \\ -\infty \text{ si } P = 0_{\mathbb{K}[X]}. \end{cases}$$
Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$,
$$\begin{aligned} \deg(P+Q) &\leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)) \\ \deg(PQ) &= \deg(P) + \deg(Q) \\ \deg(P \circ Q) &= \deg(P) \times \deg(Q) \end{aligned}$$
2. Soient $n \geqslant 1$, et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Alors le polynôme dérivé de P est donné par
$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k.$$
3. Pour tout $(k, r) \in \mathbb{N}^2$, on a
$$\left(X^k\right)^{(r)} = \begin{cases} \frac{k!}{(k-r)!} X^{k-r} \text{ si } r \leqslant k \\ 0 \text{ si } k > r. \end{cases}$$
4. Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors
$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$
5. Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}_n[X]$ donc $\deg(P) \leqslant n$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors
$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k \qquad \text{et} \qquad P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$
6. Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. Alors Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que
$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B). \end{cases}$$
7. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors
$$\alpha \text{ est une racine de } P \quad \Leftrightarrow \quad X - \alpha \text{ divise } P \quad \Leftrightarrow \quad \exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P = (X-\alpha) Q.$$
8. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une racine de P de multiplicité m si et seulement si
$$(X-\alpha)^m \text{ divise } P \qquad \text{et} \qquad (X-\alpha)^{m+1} \text{ ne divise pas } P.$$
9. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a
$$\alpha \text{ racine de } P \text{ de multiplicité } m \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0. \end{cases}$$
10. Un polynôme P non constant est dit irréductible si et seulement si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants λ et les polynômes colinéaires à lui-même λP.
11. Un polynôme est scindé s'il s'écrit comme le produit de polynômes de degré 1 ou 0.
12. Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine dans $\mathbb{C}$. En conséquence, un polynôme complexe de degré n admet exactement n racines complexes comptées avec multiplicité.
13. Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé et s'écrit donc comme le produit de polynômes de degré 0 ou 1.
Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit comme le produit de polynômes de degré 0, 1 ou 2 avec un discriminant strictement négatif.
14. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. On note $n = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \ldots, a_n$ les coefficients de P et $x_1, \ldots, x_n$ les racines de P (éventuellement confondues). Alors
    1. $x_1 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
    2. $x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.