Fiche de révisions : espaces vectoriels

I Le cours

1. Définir et caractériser un sous-espace vectoriel.
2. Définir un sous-espace vectoriel engendré. Propriété ?
3. Définir la somme de deux espaces vectoriels.
4. Définir et caractériser deux espaces en somme directe.
5. Définir et caractériser deux espaces supplémentaires.
6. Définir une famille génératrice.
7. Quelles opérations peut-on faire sur une famille génératrice ?
8. Définir et caractériser une famille libre.
9. Quelles opérations peut-on faire sur une famille libre ?
10. Définir et caractériser une famille liée.
11. Quelles opérations peut-on faire sur une famille liée ?
12. Définir et caractériser une base.
13. Définir les coordonnées d'un vecteur dans une base.
14. Enoncer le théorème de la base adaptée.

II Les savoir-faire

1. Savoir si un ensemble est un espace vectoriel ou non (0 est-il dedans ? l'ensemble est-il stable par combinaisons linéaires ?).
2. Savoir montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.
3. Savoir mettre un espace vectoriel sous forme d'espace engendré.
4. Savoir calculer une somme (sous la forme d'espaces engendrés c'est plus facile) et une intersection de sous-espaces vectoriels (sous la forme d'équations c'est plus facile).
5. Savoir montrer que deux sous-espaces sont en somme directe en montrant que si $x \in F \cap G$, alors $x = 0_E$.
6. Savoir montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires :
   Méthode 1, en dimension finie par $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = \mathrm{Vect}(\dots) + \mathrm{Vect}(\dots) = \mathrm{Vect}(\dots)$ puis des opérations élémentaires pour montrer que cela fait E.
   Méthode 2, en dimension finie par le théorème de la base adaptée. On exhibe une base de F, $\mathscr{B}_F$, puis une base de G, $\mathscr{B}_G$ et on montre que $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ est une base de E.
   Méthode 3, en dimension infinie par analyse/synthèse. On **suppose** que $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. On trouve une unique expression possible de y en fonction de x et une unique expression de z en fonction de x. Réciproquement, on fixe y et z comme trouvé précédemment, puis on montre que (i) $y \in F$, (ii) $z \in G$ et (iii) $x = y + z$.
7. Déterminer un supplémentaire. On échelonne le système décrivant l'espace F. On trouve les « pivots manquants » ces vecteurs là engendrent alors G un supplémentaire de F.
8. Savoir montrer qu'une famille est génératrice : on effectue des opérations élémentaires sur $\mathrm{Vect}(\mathscr{G})$ pour montrer que cela fait E.
9. Savoir montrer qu'une famille est libre : on suppose qu'une combinaison linéaire fait 0_E. On montre alors que tous les scalaires λ_i sont égaux nuls.
10. Savoir montrer qu'une famille est une base : on montre qu'elle est libre et génératrice.

III Les erreurs à éviter

1. Ne pas confondre scalaire, vecteur, famille, espace vectoriel. Par exemple $F \cap G = 0_E$ n'a aucun sens, $\mathrm{Vect}\,(F)$ est hors sujet, F libre n'a aucun sens. Le produit de deux vecteurs est hors sujet.
2. Ne pas mettre de scalaire dans l'espace engendré : $\left\{ \begin{bmatrix} x-y \\ 3x+y \end{bmatrix} \middle| (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ et non $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} x \\ 3x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix} \right)$. Ce n'est pas non plus $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.
3. On ne parle normalement jamais de vecteurs de polynômes. Si vous écrivez $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ X^2 \end{pmatrix} \right)$ c'est que vous êtes en train de vous perdre...
4. Ne pas oublier la phrase *« les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré »*.
5. Ne pas confondre $F + G$ avec $F \cup G$. L'union n'a aucun intérêt pour les espaces vectoriels.

IV Les réponses du cours

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un ensemble F est un sous-espace vectoriel si et seulement si (par définition) :
   - $F \subseteq E$
   - F est un espace vectoriel.

   si et seulement si (par caractérisation) :
   - $F \subseteq E$
   - $0_E \in F$
   - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F.$
2. Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Par définition, le sous-espace vectoriel engendré par $(u_1, \dots, u_n)$ est
$$\mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k \in E \;\middle|\; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$
   Un sous-espace vectoriel engendré est un sous-espace vectoriel.
3. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors
$$F + G = \{\, z \in E \mid \exists\, (x, y) \in F \times G,\ z = x + y \,\}.$$
4. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les espaces F et G sont en somme directe si et seulement si (par définition)
$$\forall\, (x, x') \in F^2,\ \forall\, (y, y') \in G^2, \qquad (x + y = x' + y') \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$
   si et seulement si (par caractérisation) :
$$F \cap G = \{0_E\}.$$
5. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les espaces F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si (par définition)
$$\forall z \in E,\ \exists!\, (x, y) \in F \times G, \quad z = x + y.$$
   si et seulement si (par caractérisation) :
   1. $F \cap G = \{0_E\}$.
   2. $F + G = E$.
6. Soient E un espace vectoriel non nul et $\mathscr{G}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{G}$ est génératrice dans E si et seulement si $E = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{G})$.
7. Il est possible de modifier une famille génératrice sans perdre son caractère générateur en
   - faisant des opérations élémentaires,
   - en rajoutant un ou des vecteurs (une sur-famille d'une famille génératrice est une famille génératrice),
   - en enlevant un vecteur SEULEMENT si celui-ci est combinaison linéaire des autres vecteurs.
8. Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{L} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{L}$ est libre si et seulement si
   - Aucun des vecteurs de $\mathscr{L}$ n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{L}$
   - i.e. pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a
$$\lambda_1\, u_1 + \cdots + \lambda_n\, u_n = 0_E \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}.$$
9. Il est possible de modifier une famille libre sans perdre son caractère libre en
   - faisant des opérations élémentaires,
   - en enlevant un ou des vecteurs (une sous-famille d'une famille libre est une famille libre),
   - en rajoutant un vecteur SEULEMENT si celui-ci n'est pas combinaison linéaire des autres vecteurs.
10. Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{L} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{L}$ est liée si et seulement si

- L'un des vecteurs au moins de $\mathscr{L}$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{L}$
- i.e. il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$, tel que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

11. Il est possible de modifier une famille liée sans perdre son caractère lié en
    - faisant des opérations élémentaires,
    - en rajoutant un ou des vecteurs (une sur-famille d'une famille liée est une famille liée).
12. Soient E un espace vectoriel non nul, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si
    - $\mathscr{B}$ est libre et génératrice dans E
    - i.e.
    $$\forall x \in E,\ \exists!\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$
13. Soient E un espace vectoriel, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n) \in E^n$ une base de E et $x \in E$ un vecteur de E. Puisque $\mathscr{B}$ est une base, il existe un unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que
    $$x = x_1 e_1 + \ldots x_n e_n.$$
    Alors $(x_1, \ldots, x_n)$ sont appelées les coordonnées de x dans E.
14. Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G. On pose $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$. Alors,
    - $F \cap G = \{0_E\} \Leftrightarrow \mathscr{B}$ est libre.
    - $F + G = E \Leftrightarrow \mathscr{B}$ est génératrice dans E.
    - $F \oplus G = E \Leftrightarrow \mathscr{B}$ est une base de E.