Fiche de révisions : séries numériques

I Le cours

1. Définir une série numérique.
2. Définir la divergence grossière. Si la série converge, que dire de son terme général ? Donner un contre-exemple à la réciproque.
3. Définir le reste d'ordre n.
4. Définir une série géométrique. Quand converge-t-elle ? Préciser alors la somme totale.
5. Définir une série télescopique. Quand converge-t-elle ? Préciser alors la somme totale.
6. Définir une série exponentielle. Quand converge-t-elle ? Préciser alors la somme totale.
7. Enoncer le théorème sur les séries de Riemann.
8. Enoncer le théorème de comparaison série-intégrale.
9. Quelle est la monotonie d'une série à termes positifs ? Conséquence ?
10. Enoncer le théorème de comparaison.
11. Enoncer le théorème des équivalents pour les séries.
12. Définir la convergence absolue. Quelle est l'implication associée ? Contre-exemple de la réciproque ?
13. Enoncer le théorème sur le grand o.

II Les savoir-faire

1. Savoir déterminer la nature d'une série. Si la série est à termes positifs :
   - en reconnaissant directement une série usuelle (géométrique, télescopique, exponentielle, de Riemann). Sinon en se ramenant à une série de référence par l'une des méthodes suivantes.
   - Par le théorème sur les équivalents,
   - par le théorème de comparaison,
   - par la règle du n^2 ou n^α pour $\alpha > 1$: on montre que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que pour $n \geqslant n_0 \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$.

   Si la série n'est pas à termes positifs ou si son signe n'est pas connu. On étudie alors la convergence absolue :
   (a) par le théorème du grand o,
   (b) en utilisant l'une des méthodes précédentes pour la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
2. Savoir calculer une somme totale en reconnaissant une somme usuelle (géométrique, télescopique, exponentielle) ou une autre méthode ad hoc (changement d'indice par exemple).
3. Savoir utiliser le théorème de comparaison série-intégrale pour majorer/minorer/encadrer une série, un reste d'ordre n et obtenir une convergence, une divergence, une limite, un équivalent. Ou au contraire utiliser une comparaison série-intégrale pour majorer/minorer/encadrer une intégrale.

III Les erreurs à éviter

1. Ne pas écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{n} u_n$.
2. Ne pas confondre le terme général u_n, la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et la somme totale $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
3. Ne jamais écrire de somme totale avant d'avoir prouver la convergence de la série.

4. Ne jamais séparer une somme totale en deux $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ avant d'avoir démontrer l'existence de deux morceaux au moins sur les trois.
5. Ne jamais croire que
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{0}.$$
Au contraire bien retenir le contre-exemple de la série harmonique.
6. Reconnaitre du premier coup d'oeil une divergence grossière. En particulier $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1$ diverge par exemple.
7. Reconnaitre une série géométrique quand on la croise $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{xn}$ par exemple est une série géométrique.
8. Le théorème de Riemann s'utilise avec un exposant α fixe et indépendant de n.
9. Le théorème sur les équivalents ne marche pas si l'une des suites n'est pas de signe constant. Pensez à le préciser.
10. Le théorème de comparaison ne marche pas si u_n n'est pas positif. Pensez à le préciser.
11. Le théorème de comparaison demande en hypothèse que les termes généraux soient comparés $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et non les séries elles-mêmes, ne pas écrire $0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_n$, c'est hors sujet.

IV Les réponses du cours

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. On appelle série de terme général u_n la suite des sommes $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On note la note $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

2. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique.
   - On dit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement si et seulement si la suite des termes généraux $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
   - Par contraposée, si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, alors la suite des termes généraux $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   - La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 tandis que la série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge.

3. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{p\geqslant n+1} u_p$ converge également et on appelle reste d'ordre n sa somme totale :
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

4. Soit $q \in \mathbb{C}$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ est une série géométrique. On a
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad |q| < 1.$$
Dans ce cas,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_{n+1} - a_n)$, dite télescopique, converge si et seulement si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0.$$
Et en cas de convergence,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_{k+1} - a_k) = \lim_{n\to+\infty} a_n - a_0.$$

6. Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle série exponentielle la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$. Cette série converge pour toute valeur de $z \in \mathbb{C}$ et on a
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \mathrm{e}^z.$$

7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Une série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si son exposant vérifie $\alpha > 1$.

8. Soient $a > 0$ et f une fonction continue et décroissante sur $]a;+\infty[$. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $p > q > a$,
$$\int_{q-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=q}^{p} f(k) \geqslant \int_{q}^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est croissante. Donc par le théorème de convergence monotone,

- ou la série est majorée et converge vers un réel positif,
- ou la série diverge vers $+\infty$.

10. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. On suppose que
$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$
Dans ce cas, si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
Par contraposée, si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.
11. Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques. Si
   1 $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$
   2 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang (ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$)

   Alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.
12. Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique.
   - On dit que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument si et seulement si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge.
   - La converge absolue implique la convergence.
   - La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument car $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est la série harmonique.
13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que
   - $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(a_n)$,
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant 0$,
   - $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge.

   Alors, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument et donc converge.