Fiche de révisions : dimension

I Le cours

1. Enoncer le théorème de la base extraite.
2. Enoncer le théorème de la base incomplète.
3. Définir la dimension d'un espace vectoriel.
4. Si le cardinal d'une famille est strictement plus grand que la dimension alors ...
5. Si le cardinal d'une famille est strictement plus petit que la dimension alors ...
6. Caractériser par la dimension le fait qu'une famille soit une base.
7. Caractériser par la dimension le fait que deux sous-espaces vectoriels soient égaux.
8. Caractériser par la dimension la supplémentarité.
9. Définir le rang.
10. Caractériser par le rang le fait qu'une famille soit génératrice/libre/base.
11. Enoncer la formule de Grassmann.

II Les savoir-faire

1. Déterminer la dimension d'un espace vectoriel en déterminant une base de cet espace.
2. Observer qu'une famille est liée ou non, génératrice ou non, en comparant son cardinal à la dimension de l'espace.
3. Montrer qu'une famille est une base à l'aide de la dimension.
4. Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux à l'aide de la dimension.
5. Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires à l'aide de la dimension.
6. Savoir calculer le rang d'une famille.
7. Savoir montrer qu'une famille est libre/génératrice/une base à l'aide de son rang.
8. A l'aide de la dimension, déterminer un espace vectoriel : si sa dimension vaut 0 ou $n = \dim(E)$ ou 1 (trouver un vecteur u non nul dans F pour en déduire que $F = \mathrm{Vect}(u)$).
9. Déterminer un supplémentaire à l'aide du théorème de la base adaptée.

III Les erreurs à éviter

1. Ne pas confondre famille avec espace vectoriel ainsi que le cardinal avec la dimension. On parle du cardinal d'une famille et de la dimension d'un espace vectoriel. La dimension d'une famille n'a aucun sens et le cardinal d'un espace vectoriel non nul est toujours infini.
2. N'utiliser les arguments de dimension QUE en dimension finie ce qui n'est pas le cas de tous les espaces (exemple l'ensemble des fonctions, des suites...)
3. La dimension de la somme n'est pas toujours la somme des dimensions, Grassmann c'est pas pour les nuls.

IV Les réponses du cours

1. Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie. De toute famille $\mathscr{G}$ finie de vecteurs de E, génératrice dans E, il existe une sous-famille $\mathscr{B}$ de $\mathscr{G}$ qui soit une base de E.
2. Soient E un espace vectoriel non nul de dimension finie, $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E et $\mathscr{L}$ une famille libre de E. En ajoutant des vecteurs de $\mathscr{G}$ à $\mathscr{L}$, il est possible de construire $\mathscr{B}$ une sur-famille de $\mathscr{L}$ qui soit une base de E.
3. Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie (i.e. ayant une famille génératrice finie). Toutes les bases de E ont alors le même cardinal. On appelle dimension de E le cardinal commun à toutes ses bases.
4. Si le cardinal d'une famille est strictement plus grand que la dimension alors la famille est liée.
5. Si le cardinal d'une famille est strictement plus petit que la dimension alors la famille n'est pas génératrice.
6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E. Si (au moins) deux des assertions suivantes sont vraies
   1. $\mathscr{F}$ est génératrice dans E.
   2. $\mathscr{F}$ est libre.
   3. $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim(E)$.

   Alors $\mathscr{F}$ est une base de E.
7. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si (au moins) deux des assertions suivantes sont vraies
   1. $F \subseteq G$
   2. $G \subseteq F$
   3. $\dim(F) = \dim(G)$.

   Alors $F = G$.
8. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si (au moins) deux des assertions suivantes sont vraies
   1. $F \cap G = \{0_E\}$.
   2. $F + G = E$.
   3. $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

   Alors F et G sont supplémentaires.
9. Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle rang de $\mathscr{F}$ l'entier défini par
$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathscr{F})).$$
10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E. Alors
    - $\mathscr{F}$ est génératrice dans E si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = n$.
    - $\mathscr{F}$ est libre dans E si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = p$.
    - $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = n = p$.
11. Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. On a
$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$