Fiche de révisions : fonctions réelles

I Le cours

1. Définir un ensemble image et un ensemble image réciproque.
2. Comment obtient-on le graphe de $g_1 : x \mapsto f(x) + a$? de $g_2 : x \mapsto f(x+a)$? de $g_3 : x \mapsto af(x)$? de $g_4 : x \mapsto f(ax)$?
3. Définir une fonction paire et une fonction impaire. Que dire de son graphe ?
4. Définir une fonction périodique.
5. Définir une fonction croissante/décroissante, strictement croissante/décroissante.
6. Définir une fonction majorée, minorée, bornée. Caractériser par la valeur absolue le fait qu'une fonction soit bornée.
7. Définir une fonction continue en a.
8. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
9. Définir une fonction dérivable en a. Quel est le lien entre continuité et dérivabilité ?
10. Donner l'équation de la tangente.
11. Donner la dérivée n-ième d'une combinaison linéaire de fonctions.
12. Définir un maximum/minimum global. Définir un maximum/minimum local.
13. Caractériser une fonction injective, surjective, bijective.
14. Enoncer le théorème de la bijection.
15. Enoncer le théorème de la dérivée de la réciproque.

Paramètre	fonction	dérivée
	u^α	....
$n \in \mathbb{N}$, $\alpha = -n$	$\frac{1}{u^n}$	....
$\alpha = 1/2$ et $u > 0$ sur I	$\sqrt{u}$	....
	e^u	....
$u > 0$ sur I	$\ln(u)$	....
$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$	$\lambda u + \mu v$	....
	uv	....
v ne s'annulant pas sur I	$\frac{u}{v}$	....
u dérivable sur I et v sur $J \supseteq v(I)$	$v \circ u$	....

Si	et si	et si de plus	alors on a
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$			....
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$		....
	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$	....
		$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=b$	....
	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$		....
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$			....

II Les savoir-faire

1. Savoir donner le domaine de définition d'une fonction.
2. Savoir montrer qu'une fonction est continue en calculant $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$ et montrer que cela vaut $f(a)$.
3. Savoir appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire.
4. Savoir montrer qu'une fonction est dérivable en calculant la limite de son taux d'accroissement.
5. Savoir calculer un domaine de dérivabilité et dériver une fonction.
6. Savoir établir un tableau de variations (domaine de définition, puis de dérivabilité, dérivée, signe de la dérivée puis limites/valeurs aux bornes). En déduire les éventuels maximums, minimums locaux ou globaux. En déduire également un ensemble image ou image réciproque. En déduire aussi si la fonction est injective/surjective/bijective.
7. Savoir montrer par caractérisation qu'une fonction est injective/surjective/bijective.
8. Savoir appliquer le théorème de la bijection.
9. Savoir calculer une fonction réciproque.
10. Savoir appliquer le théorème de la dérivée de la réciproque.
11. Savoir étudier une branche asymptotique.

III Les erreurs à éviter

1. Tout élément x admet une unique image $f(x)$. Tout élément y n'a pas forcément un antécédent ou peut en avoir plusieurs.
2. $f\left([a;b]\right)$ n'est pas $[f(a);f(b)]$ par exemple si f est la fonction carrée, $f\left([-1;2]\right)=[0;4]$.
3. Oublier le caractère centré de $\mathscr{D}_f$ pour la parité/imparité.
4. Oublier de parler de dérivabilité avant de dériver.
5. Faire une erreur de calcul en dérivant.
6. Etudier $f'(x)=0$ au lieu de $f'(x)\geqslant 0$ pour le tableau de variations.
7. Chercher les limites après avoir écrit le tableau complet.
8. Oublier $f'(x)\neq 0$ dans le théorème de dérivée de la réciproque.

IV Les réponses du cours

1. Soient $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$, $A \subseteq U$ et $B \subseteq \mathbb{R}$.
   - L'image directe de A par f est
   $$f(A) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \}.$$
   - L'image réciproque de B par f est
   $$f^{\leftarrow}(B) = \{ x \in U \mid f(x) \in B \}.$$
2. A partir du graphe de f, on obtient le graphe de
   - g_1 par une translation de vecteur $a\overrightarrow{j}$.
   - g_2 par une translation de vecteur $-a\overrightarrow{i}$.
   - g_3 par une dilatation/contraction verticale de coefficient a.
   - g_4 par une dilatation/contraction horizontale de coefficient $\frac{1}{a}$.
3. Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$.
   La fonction f est paire si
   - U est centré en 0,
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$.

   Le graphe de f est alors symétrique par rapport à (Oy).
   La fonction f est impaire si
   - U est centré en 0,
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$.

   Le graphe de f est alors symétrique par rapport à $(0, 0)$.
4. Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$. La fonction f est périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que
   - $\forall x \in U,\ x + T \in U$,
   - $\forall x \in U,\ f(x + T) = f(x)$.
5. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est croissante sur I si
   $$\forall (x, y) \in I^2, \qquad [(x \leqslant y) \quad \Rightarrow \quad (f(x) \leqslant f(y))].$$
   f est décroissante sur I si
   $$\forall (x, y) \in I^2, \qquad [(x \leqslant y) \quad \Rightarrow \quad (f(x) \geqslant f(y))].$$
   f est strictement croissante sur I si
   $$\forall (x, y) \in I^2, \qquad [(x < y) \quad \Rightarrow \quad (f(x) < f(y))].$$
   f est strictement décroissante sur I si
   $$\forall (x, y) \in I^2, \qquad [(x < y) \quad \Rightarrow \quad (f(x) > f(y))].$$
6. Soient $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$. On a les définitions suivantes :
   $$\begin{array}{rcl} f \text{ est majorée sur } U & \Leftrightarrow & \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in U, \quad f(x) \leqslant M \\ f \text{ est minorée sur } U & \Leftrightarrow & \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in U, \quad m \leqslant f(x) \\ f \text{ est bornée sur } U & \Leftrightarrow & \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in U, \quad m \leqslant f(x) \leqslant M \\ & \Leftrightarrow & \exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in U, \quad |f(x)| \leqslant M. \end{array}$$
7. Soient $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a, $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On a
   $$f \text{ continue en } a \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to a} f(x) \text{ existe et vaut } f(a).$$
8. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{F}([a; b], \mathbb{R})$. Si f est continue sur $[a; b]$ alors,
   $$\forall \lambda \in [f(a); f(b)], (\text{ ou } [f(b); f(a)]),\ \exists c \in [a; b], \qquad f(c) = \lambda.$$

9. Soient $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a, $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On a
$$f \text{ est dérivable en } a \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
En particulier
$$(\ f \text{ dérivable en } a\ ) \qquad \Rightarrow \qquad (\ f \text{ continue en } a\ ).$$
10. Soient $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a, $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. Si f est dérivable en a, alors son graphe admet une tangente d'équation :
$$y = f'(a)\,(x - a) + f(a).$$
11. Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f, g) \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Si f et g sont n-fois dérivables sur I, alors $\lambda f + \mu g$ aussi et
$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$
12. Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$, $M \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$. On dit que M est le maximum de f sur U si
    - $\exists x_0 \in U,\ M = f(x_0)$
    - $\forall x \in U,\ f(x) \leqslant M$.

    On dit que m est le minimum de f sur U si
    - $\exists x_0 \in U,\ m = f(x_0)$
    - $\forall x \in U,\ f(x) \geqslant M$.

    On dit que M est un maximum local de f si
    - $\exists x_0 \in U,\ M = f(x_0)$
    - $\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in \,]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[\, \cap U,\ f(x) \leqslant M$.

    On dit que m est un minimum local de f sur U si
    - $\exists x_0 \in U,\ m = f(x_0)$
    - $\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in \,]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[\, \cap U,\ f(x) \geqslant M$.
13. Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(U, V)$. On dit que
    - f est injective sur U si et seulement si $\forall (x, y) \in U^2,\ [(f(x) = f(y)) \ \Rightarrow\ (x = y)]$.
    - f est surjective dans V si et seulement si $\forall y \in V,\ \exists x \in U,\ f(x) = y$.
    - f est une bijection de U dans V si et seulement si $\forall y \in V,\ \exists! x \in U,\ f(x) = y$.
14. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. Si
    - f est continue sur I,
    - f est strictement monotone sur I

    alors f définit une bijection de I dans $J = f(I)$. De plus sa réciproque f^{-1} est une bijection de J dans I, continue et strictement monotone sur J (de même monotonie que f).
15. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$, $J = f(I)$. On suppose que
    - f est strictement monotone sur I,
    - f est dérivable sur I,
    - pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$,

    alors f^{-1} existe, est dérivable sur J et
$$\forall x \in J, \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Si	et si	et si de plus	alors on a
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$			une asymptote horizontale d'équation $y = b$
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$		une branche parabolique de direction (Oy)
	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \neq 0$	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$	une branche parabolique de direction asymptotique $y = ax$
		$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$	une asymptote d'équation $y = ax + b$
	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$		une branche parabolique de direction (Ox)
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$			une asymptote verticale d'équation $x = a$