Fiche de révisions : applications linéaires

I Le cours

1. Définir une application linéaire.
2. Que dire de l'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$? Enoncer aussi la stabilité par la composition.
3. Définir le noyau et l'image d'une application linéaire.
4. Définir et caractériser une projection.
5. Définir et caractériser une symétrie.
6. Caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire.
7. Définir les termes suivants : isomorphismes, endomorphismes, automorphismes, forme linéaire.
8. Que dire de l'ensemble $\mathrm{GL}(E)$?
9. Que dire de l'image d'une famille par une application linéaire ? (Prop II.5)
10. Caractériser une application linéaire suivant l'image d'une base. (Prop II.6)
11. Comparer les dimensions des espaces de départ et d'arrivée suivant la nature de l'application linéaire.
12. Définir le rang.
13. Enoncer le théorème du rang.
14. Caractériser les isomorphismes en dimension finie.
15. Préciser la structure des solutions d'une équation linéaire.

II Les savoir-faire

1. Montrer qu'une application est linéaire (dans le cas endomorphisme bien vérifier que $E = F$).
2. Déterminer le noyau par définition.
3. Déterminer l'image d'une application linéaire : par la définition en dimension infinie ou par la formule $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(\mathscr{B}))$ lorsque l'on a $\mathscr{B}$ une famille génératrice de l'espace de départ.
4. Montrer qu'une application linéaire est injective par le noyau ou l'image d'une base.
5. Montrer qu'une application linéaire est surjective par l'image ou l'image d'une base.
6. Montrer qu'une application est bijective : par le noyau et l'image, par l'image d'une base, par caractéristaion des isomorphismes en dimension finie.
7. Calculer le rang d'une application linéaire par la définition ou le théorème du rang.
8. Savoir penser au théorème du rang lorsque l'espace de départ est de dimension finie.
9. Faire usage de la dimension : pour caractériser les isomorphismes, pour savoir si une application linéaire n'est pas injective (direct si $\dim(E) > \dim(F)$), surjective (direct si $\dim(E) < \dim(F)$) ou bijective (direct si $\dim(E) \neq \dim(F)$).
10. Savoir traiter les exercices théoriques en revenant aux définitions.

III Les erreurs à éviter

1. Il est inutile de montrer que $f(0_E) = 0_F$ pour montrer que f est linéaire, c'est automatique.
2. Ne pas se tromper sur la définition du noyau ou de l'image. $\mathrm{Im}(f)$ n'est pas $\{(x, y) \mid y = f(x)\}$ ou $\{\forall y \in F \mid \dots\}$.
3. Ne pas oublier l'hypothèse de la dimension finie dans le théorème du rang.
4. Bien penser que le théorème du rang fait appel à l'espace de départ et non celui d'arrivée.

IV Les réponses du cours

1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{F}(E,F)$ une fonction de E dans F. On dit que f est linéaire si et seulement si
$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x,y) \in E^2, \qquad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$
2. Soient E, F et G trois espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors, $g \circ f$ est linéaire.
3. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors
   - le noyau de f est défini par
   $$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$
   - l'image de f est définie par
   $$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}.$$
4. Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E. La projection sur F parallèlement à G est l'application
$$p : \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \to & E \\ x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 \end{array}$$
Dans ce cas $F = \mathrm{Im}(p) = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$.
De plus, pour $p \in \mathscr{L}(E)$, on a
$$p \text{ projection} \qquad \Leftrightarrow \qquad p \circ p = p.$$
5. Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E. La symétrie sur F parallèlement à G est l'application
$$s : \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \to & E \\ x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 - x_2 \end{array}$$
Dans ce cas $F = \{x \in E \mid s(x) = x\} = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
De plus, pour $s \in \mathscr{L}(E)$, on a
$$s \text{ symétrie} \qquad \Leftrightarrow \qquad s \circ s = \mathrm{Id}_E.$$
6. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors
   - f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
   - f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
7. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{F}(E,F)$.
   - On dit que f est un isomorphisme si et seulement si f est linéaire et bijective.
   - On dit que f est un endomorphisme si et seulement si f est linéaire et $E = F$.
   - On dit que f est un automorphisme si et seulement si f est linéaire, bijective et $E = F$.
   - On dit que f est une forme linéaire si et seulement si f est linéaire et $F = \mathbb{R}$.
8. Soit E un espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E est
   - stable par composition : pour tout $(f,g) \in \mathrm{GL}(E)^2$, on a $f \circ g \in \mathrm{GL}(E)$.
   - stable par inverse : pour tout $f \in \mathrm{GL}(E)$, on a $f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$.
9. Soient E et F deux espaces vectoriels, $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors
   - Si f est injective et $\mathscr{F}$ libre alors $f(\mathscr{F}) = (f(u_1), \dots, f(u_n))$ est libre.
   - Si f est surjective et $\mathscr{F}$ est génératrice dans E alors $f(\mathscr{F})$ est génératrice dans F.
   - Si f est un isomorphisme et $\mathscr{F}$ une base de E alors $f(\mathscr{F})$ est une base de F.
10. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose E de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
    - f est injective si et seulement si $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F.
    - f est surjective si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est une famille génératrice de F.
    - f est un isomorphisme si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est une base de F.
11. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- Si f est injective alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.
- Si f est surjective alors $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.
- Si f est un isomorphisme alors $\dim(E) = \dim(F)$.

12. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie. Alors le rang de f est défini par
$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)).$$
13. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie. Alors,
$$\operatorname{rg}(f) + \dim(\operatorname{Ker}(f)) = \dim(E).$$
14. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Si deux des points suivants sont vrais
    - $\dim(E) = \dim(F)$
    - f est injective
    - f est surjective

    Alors f est un isomorphisme.
15. Soient E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $b \in F$ et
$$\mathcal{S} = \{\, x \in E \mid f(x) = b \,\}.$$
    Alors
    - Si $b \neq \operatorname{Im}(f)$, $\mathcal{S} = \emptyset$.
    - Si $b \in \operatorname{Im}(f)$, $\exists x_0 \in E,\ f(x_0) = b$. Dès lors $\mathcal{S} = x_0 + \operatorname{Ker}(f) = \{\, x_0 + x \mid x \in \operatorname{Ker}(f) \,\}$.