Fiche de révisions : trigonométrie

I Le cours

1. Donner les propriétés de la fonction cosinus et tableau de variations sur $[0;2\pi]$.
2. Donner les propriétés de la fonction sinus et tableau de variations sur $[0;2\pi]$.
3. Donner les propriétés de la fonction tangente et tableau de variations sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
4. Donner les valeurs usuelles de cosinus, sinus, tangente.
5. Enoncer les trois limites remarquables.
6. Enoncer les formule de l'angle moitié.
7. Formulaire :

$\cos^2(x)+\sin^2(x)=$	....	$\cos(a+b)=$	....
$\cos(a-b)=$	....	$\sin(a+b)=$	....
$\sin(a-b)=$	....	$\tan(a+b)=$	....
$\tan(a-b)=$	....	$\cos(a)\cos(b)=$	....
$\cos(a)\sin(b)=$	....	$\sin(a)\sin(b)=$	....
$\cos(2x)=$	....	$\sin(2x)=$	....
$\tan(2x)=$	....	$\cos^2(x)=$	....
$\sin^2(x)=$	....	$\cos(p)+\cos(q)=$	....
$\cos(p)-\cos(q)=$	....	$\sin(p)+\sin(q)=$	....
$\sin(p)-\sin(q)=$	....	$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=$	....
$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=$	....	$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=$	....
$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=$	....	$\cos(x\pm\pi)=$	....
$\sin(x\pm\pi)=$	....	$\cos(\pi-x)=$	....
$\sin(\pi-x)=$	....	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$	....
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$	....	$\tan(x\pm\pi)=$	....

II Les savoir-faire

1. Savoir développer.
2. Savoir linéariser.
3. Savoir factoriser ou mettre sous forme polaire.
4. Savoir utiliser les invariances des fonctions trigonométriques.
5. User des précédentes méthodes pour simplifier une expression trigonométrique.
6. Savoir résoudre une équation/inéquation et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.
7. Savoir étudier une fonction composée de fonctions trigonométriques.

III Les erreurs à éviter

1. La dérivée de sinus est **+**cosinus tandis que celle de cosinus est **-**sinus. Les primitives de sinus sont **-**cosinus + constante et celles de cosinus sont **+**sinus + constante.
2. La fonction tangente n'est pas que 2π-périodique, elle est aussi π-périodique.
3. Toujours vérifier qu'un terme est non nul avant de le simplifier dans une équation/inéquation.
4. Ne pas oublier de vérifier le signe de ce par quoi on multiplie/divise une inégalité (le justifier) et adapter l'inégalité dans le cas négatif.
5. Ne pas oublier l'existence de la variable k dans les solutions : $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que... et le remettre après chaque équivalence !
6. Ne pas oublier de diviser/multiplier le modulo lorsque l'on divise/multiplie des congruences.

IV Les réponses du cours

1. La fonction cosinus est définie, continue, dérivable et même n-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$. La fonction cosinus est paire et 2π-périodique. Enfin,

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos	1	0	-1	0	1

2. La fonction sinus est définie, continue, dérivable et même n-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$. La fonction sinus est impaire et 2π-périodique. Enfin,

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	1	0	-1	0

3. La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. De plus la fonction est continue, dérivable et même n-fois dérivable sur son domaine de définition pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$,

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Enfin,

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
tan	$-\infty$	0	$+\infty$

4. On a

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

5. Les trois limites usuelles sont

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1, \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{1 - \cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\tan(h)}{h} = 1.$$

6. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ tel que $\frac{x}{2} \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors,

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}, \qquad \tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

7. Formulaire :

$\cos^2(x)+\sin^2(x)=$	1	$\cos(a+b)=$	$\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
$\cos(a-b)=$	$\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$	$\sin(a+b)=$	$\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$
$\sin(a-b)=$	$\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$	$\tan(a+b)=$	$\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$
$\tan(a-b)=$	$\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$	$\cos(a)\cos(b)=$	$\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$
$\cos(a)\sin(b)=$	$\frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$	$\sin(a)\sin(b)=$	$\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$
$\cos(2x)=$	$\cos^2(x)-\sin^2(x)=2\cos^2(x)-1=1-2\sin^2(x)$	$\sin(2x)=$	$2\sin(x)\cos(x)$
$\tan(2x)=$	$\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$	$\cos^2(x)=$	$\frac{1+\cos(2x)}{2}$
$\sin^2(x)=$	$\frac{1-\cos(2x)}{2}$	$\cos(p)+\cos(q)=$	$2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\cos(p)-\cos(q)=$	$-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$	$\sin(p)+\sin(q)=$	$2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\sin(p)-\sin(q)=$	$2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$	$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=$	$-\sin(x)$
$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=$	$\cos(x)$	$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=$	$\sin(x)$
$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=$	$-\cos(x)$	$\cos(x\pm\pi)=$	$-\cos(x)$
$\sin(x\pm\pi)=$	$-\sin(x)$	$\cos(\pi-x)=$	$-\cos(x)$
$\sin(\pi-x)=$	$\sin(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$	$\sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$	$\cos(x)$	$\tan(x\pm\pi)=$	$\tan(x)$