Fiche de révisions : nombres complexes

I Le cours

1. Définir un imaginaire pur.
2. Préciser l'affixe d'un point milieu I et du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Définir le conjugué.
4. Exprimer la partie réelle, la partie imaginaire et le module en fonction du conjugué.
5. Caractériser le fait d'être réel ou imaginaire pur ou de module 1 par le conjugué.
6. Par quelle transformation du plan obtient-on le conjugué ?
7. Définir le module. Que représente géométriquement le module ?
8. Enoncer la formule donnant le carré du module d'une somme.
9. Enoncer les inégalités triangulaires.
10. Définir $\mathbb{U}$.
11. Enoncer les propriétés de stabilité de $\mathbb{U}$.
12. Définir l'exponentielle complexe sur $i\mathbb{R}$..
13. Enoncer les propriétés de l'exponentielle sur $i\mathbb{R}$.
14. Enoncer les formules d'Euler.
15. Enoncer la formule de Moivre.
16. Définir la forme polaire et sa pseudo-unicité.
17. Donner l'interprétation géométrique de l'argument.
18. Ecrire $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ en fonction d'un argument.

II Les savoir-faire

1. Savoir donner la partie réelle, partie imaginaire, forme algébrique, module, argument et forme polaire d'un complexe.
2. Savoir passer de la forme algébrique à la forme polaire et inversement.
3. Utiliser la caractérisation avec le conjugué pour résoudre $Z \in \mathbb{R}$ ou $i\mathbb{R}$ ou $\mathbb{U}$.
4. Savoir représenter les solutions dans le plan complexe.
5. Savoir factoriser par l'angle moitié.
6. Savoir développer une expression trigonométrique en passant par les complexes.
7. Savoir linéariser une expression trigonométrique en passant par les complexes.

III Les erreurs à éviter

1. Pour $z \in \mathbb{C}$, la partie imaginaire de $1 + iz$ n'est pas z. De même son conjugué n'est pas $1 - iz$.
2. $\mathrm{Re}\,(zz') \neq \mathrm{Re}\,(z)\,\mathrm{Re}\,(z')$ et $|z + z'| \neq |z| + |z'|$.
3. $z\overline{z} \neq |z|$ et $|z| \neq a^2 + b^2$.
4. NE JAMAIS FAIRE D'INEGALITE DANS LES COMPLEXES : $z \leqslant z'$ ou $z \geqslant 0$ n'a aucun sens si z et z' ne sont pas réels.
5. Un argument de $a\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $a \in \mathbb{R}$ n'est pas $\frac{\pi}{4}$ lorsque a est négatif.
6. Ne pas parler de l'argument mais d'UN argument.

IV Les réponses du cours

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$. De même $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$.
2. Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan.
   - Soit $I(z_I)$ le milieu de $[AB]$, alors $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$.
   - L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
3. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $z = a + ib$. Alors, le conjugué de z est donné par
$$\overline{z} = a - ib.$$
4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a
$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \qquad \text{et} \qquad |z|^2 = z\overline{z}.$$
5. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad z = \overline{z} \\ z \in i\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad z = -\overline{z} \\ z \in \mathbb{U} \quad &\Leftrightarrow \quad z \neq 0 \ \text{ et } z = \frac{1}{\overline{z}}. \end{aligned}$$
6. Soit $M(z)$ un point du plan. Le point $M'(\overline{z})$ est le symétrique de M par rapport à la droite (Ox).
7. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $z = a + ib$. Le module de z est donné par
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$
Soit $M(z)$ un point du plan. Le module de z représente la distance de M à l'origine : OM.
8. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a
$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2.$$
9. Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a
$$||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$
10. $\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$.
11. Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors,
$$-z \in \mathbb{U}, \qquad \frac{1}{z} \in \mathbb{U}, \qquad \overline{z} \in \mathbb{U}.$$
Si $z' \in \mathbb{U}$, alors $zz' \in \mathbb{U}$.
12. Pour tout $ttt \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{e}^{i\,\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$
13. Pour tout $\left(\theta, \theta'\right) \in \mathbb{R}^2$,
   - $\mathrm{e}^{i\,\theta} = \mathrm{e}^{i\,\theta'} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi$.
   - $\mathrm{e}^{i\left(\theta+\theta'\right)} = \mathrm{e}^{i\,\theta}\,\mathrm{e}^{i\,\theta'}$
   - $\overline{\mathrm{e}^{i\,\theta}} = \mathrm{e}^{-i\,\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{i\,\theta}}$.
14. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a
$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}.$$
15. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a
$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$
16. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que
$$z = r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}.$$
De plus pour tout $(r, r') \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)$ et tout $(\theta, \theta) \in \mathbb{R}^2$,
$$r\,\mathrm{e}^{i\,\theta} = r'\,\mathrm{e}^{i\,\theta'} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} r = r' \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \qquad \theta = \theta' + 2k\pi. \end{cases}$$
17. Soit $M(z)$ un point du plan complexe, θ un argument de z. Alors, θ est une mesure de l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.
18. Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$. On a
$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right).$$