Fiche de révisions : calcul algébrique

I Le cours

1. Donner la somme des premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes.
2. Donner la valeur d'une somme télescopique
3. Donner la valeur d'une somme géométrique.
4. Enoncer la formule de Bernoulli.
5. Définir le coefficient binomial.
6. Enoncer la formule de Pascal.
7. Enoncer la formule du binôme de Newton.

II Les savoir-faire

1. Savoir calculer une somme
2. Savoir factoriser son résultat.
3. Savoir reconnaitre et calculer une somme géométrique.
4. Savoir reconnaitre et calculer une somme télescopique.
5. Savoir faire un glissement d'indice.
6. Savoir faire une inversion d'indice.
7. Savoir reconnaitre un binôme de Newton.
8. Savoir calculer une somme double rectangulaire.
9. Savoir échanger l'ordre de sommation d'une somme double rectangulaire.
10. Savoir calculer une somme double triangulaire.
11. Savoir échanger l'ordre de sommation d'une somme double triangulaire.

III Les erreurs à éviter

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \neq \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+3)$ n'est pas égal à $\frac{n(n+1)}{2} + 3$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$ n'est pas égal à n.
4. Le résultat d'une somme sur k ne dépend pas de k. Eviter par exemple d'écrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k = k \sum_{k=1}^{n} a_k$.
5. Ne pas écrire $\displaystyle\sum_{\tilde{k}=n}^{0} \dots$ après une inversion d'indice, l'indice inférieur doit toujours être plus petit que l'indice supérieur.
6. La formule de Bernoulli n'est vrai que pour $n \neq 0$. L'indice de fin dans la somme de Bernoulli est $n-1$ et non n et l'exposant sur b (ou a) est $n-1+k$ et non $n-k$.
7. Dans une somme double triangulaire l'indice interne dépend de l'indice externe mais l'indice externe lui ne dépend pas de l'indice interne. Ne pas écrire : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{j} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$.
8. Etre attentif à l'inégalité stricte lorsqu'elle apparaît dans une somme double $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \dots$ et ses conséquences.

IV Les réponses du cours

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2.$$

2. Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $q \leqslant p$ et $(a_k)_{q \leqslant k \leqslant p+1} \in \mathbb{C}^{p-q+2}$. Alors,
$$\sum_{k=q}^{p} a_{k+1} - a_k = a_{p+1} - a_q.$$

3. Soient $q \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$. On a
$$\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

4. Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}.$$

5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$.
$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in [\![0;n]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

7. Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$