Fiche de révisions : fonctions usuelles

I Le cours

1. Tracer le graphe de la fonction exponentielle / logarithme / cosinus hyperbolique / sinus hyperbolique /arccosinus / arcsinus / arctan, y faire apparaitre les valeurs remarquables, les tangentes remarquables, les asymptotes remarquables.
2. Enoncer la croissance comparée du logarithme en $+\infty$/en 0, de l'exponentielle en $-\infty$/en $+\infty$.
3. Donner le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et la dérivée de la fonction exponentielle / logarithme / cosinus hyperbolique / sinus hyperbolique / arccosinus / arcsinus / arctan.
4. Enoncer l'inégalité usuelle sur le logarithme et celle sur l'exponentielle.
5. Donner les différents domaines de définition de $x \mapsto x^a$.
6. Définir le logarithme et l'exponentielle en base a.
7. Enoncer la formule reliant les carrés des fonctions hyperboliques et celle sur arctan.

II Les savoir-faire

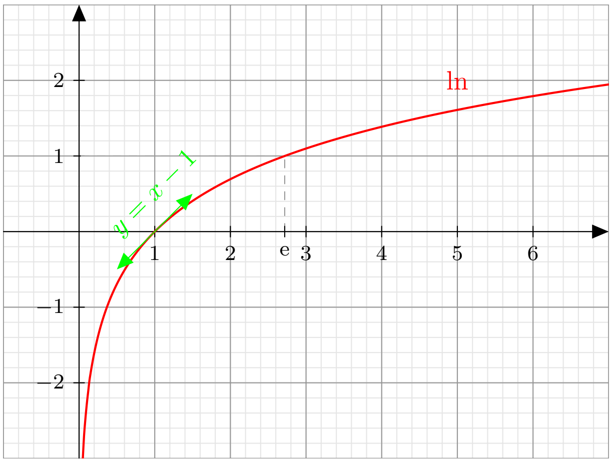
1. Déterminer un domaine de définition et un domaine de dérivabilité (bien recommencer les calculs pour la racine carrée, la valeur absolue, l'arcsinus et l'arccos pour le domaine de dérivabilité).
2. Dériver les fonctions usuelles et leurs composées.
3. Simplifier l'expression d'une fonction en calculant sa dérivée.
4. Résoudre une équation mettant en jeu des fonctions puissances ou logarithme et exponentielle en base a.
5. Résoudre une équation avec des fonctions circulaires réciproques en composant par une fonction trigonométrique.

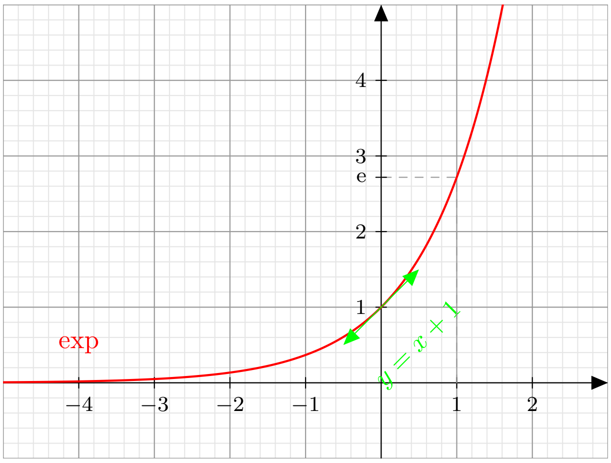
III Les erreurs à éviter

1. Les fonctions arcsinus et arccosinus ne sont pas dérivables sur leur domaine de définition.
2. En cas de composée de avec d'autres fonctions ne pas simplement « ouvrir » l'intervalle. Exemple : $x \mapsto \arccos\left(1-2x^2\right)$ est définie sur $[-1;1]$ mais n'est pas dérivable sur $]-1;1[$.
3. Primitiver une fonctions UNIQUEMENT sur un **intervalle** et ne pas oublier la constante d'intégration.
4. Si l'on compose par une fonction non injective (sinus, cosinus, tangente, fonction carrée...) ne pas écrire d'équivalent.
5. La formule $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ n'est valide que sur $\mathbb{R}_+^*$, changer de signe sur $\mathbb{R}_-^*$.

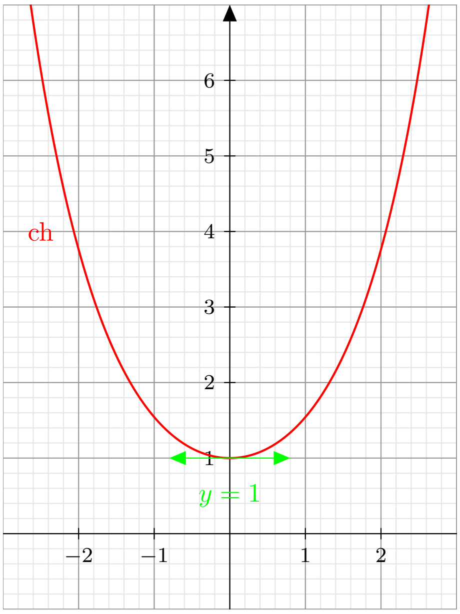
IV Les réponses du cours

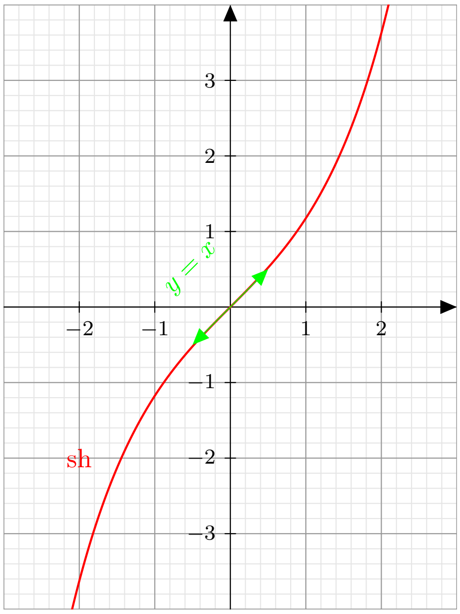
1. Les fonctions logarithme et exponentielle :



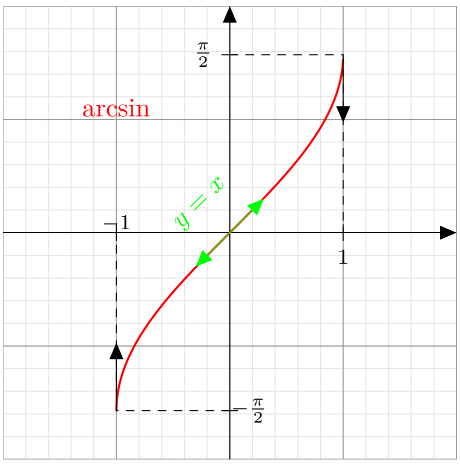


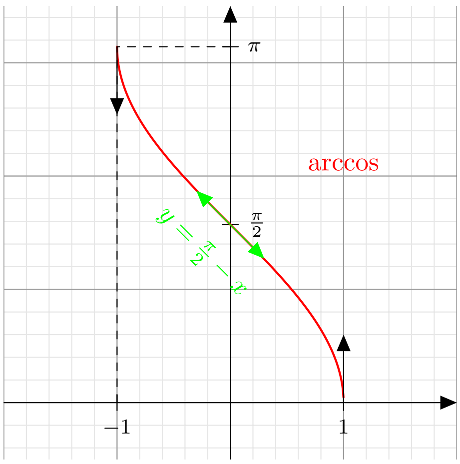
Les fonctions hyperboliques :

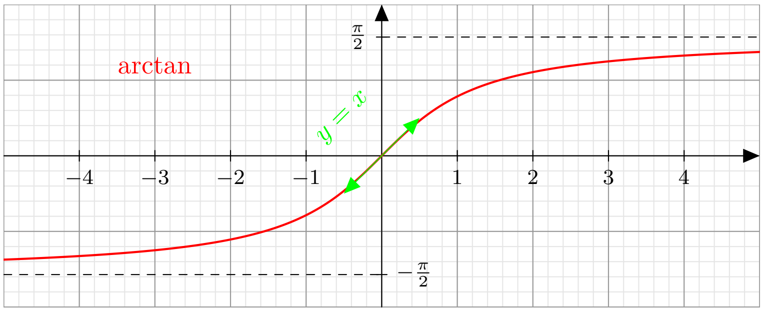




Les fonctions circulaires réciproques :







2. • Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^b \left|\ln(x)\right|^a = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^a(x)}{x^b} = 0.$$

• Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^b \, \mathrm{e}^{ax} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^b} = +\infty.$$

3.

<table>
<tr><th>Fonction</th><th>Définition/ Continuité</th><th>Dérivabilité</th><th>Dérivée</th></tr>
<tr><td>$x \mapsto \mathrm{e}^x$</td><td colspan="2">$\mathbb{R}$</td><td>$x \mapsto \mathrm{e}^x$</td></tr>
<tr><td>ln</td><td colspan="2">$]0; +\infty[$</td><td>$x \mapsto \frac{1}{x}$</td></tr>
<tr><td>ch</td><td colspan="2">$\mathbb{R}$</td><td>$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$</td></tr>
<tr><td>sh</td><td colspan="2">$\mathbb{R}$</td><td>$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$</td></tr>
<tr><td>arcsin</td><td>$[-1; 1]$</td><td>$]-1; 1[$</td><td>$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td></tr>
<tr><td>arccos</td><td>$[-1; 1]$</td><td>$]-1; 1[$</td><td>$x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$</td></tr>
<tr><td>arctan</td><td colspan="2">$\mathbb{R}$</td><td>$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$</td></tr>
</table>

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ et pour tout $x \in \left]-1; +\infty\right[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
5. Soit $f_a : x \mapsto x^a$ et $\mathscr{D}_a$ son domaine de définition. On a

$$\mathscr{D}_a = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}^* & \text{si } a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

En particulier, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on retiendra que

$$a^b = \mathrm{e}^{b \ln(a)}$$

6. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp_a(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \ln(a)}.$$

7. On a les relations suivantes :
   - $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$
   - $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
   - $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$