Chapitre XXIV : Formulaire

Matrice d'une famille de vecteurs		$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_p) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} u_1 & \cdots & u_p \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$
Matrice d'une application linéaire		$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{array}{c} e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{array} & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$
Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$		$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$
Image d'un vecteur		$Y = AX$ avec $Y = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x))\,, A = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,, X = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}(x)$
Matrice de composition		$C = BA$ avec $C = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f)\,, B = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g)\,, A = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$
Matrice de f^k		$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}\left(f^k\right) = A^k = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}(f)^k$
Caractérisation des isomorphismes		f est un isomorphisme si et seulement si $A = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_F}(f)$ est inversible
Matrice de l'inverse		$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}\left(f^{-1}\right) = A^{-1} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)^{-1}$
Caractérisation des bases		$\mathscr{F}$ est une base si et seulement si $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}(\mathscr{F})$ est inversible
Matrice de passage		$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$
Inverse d'une matrice de passage		$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$
Composition de matrices de passage		$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}$
Vecteur dans une nouvelle base		$X = PX'$ avec $X = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(x),\ P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'},\ X' = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}'}(x)$
Application dans une nouvelle base		$D = P^{-1}AQ$ avec $D = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f),\ A = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F},\ P = P_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}'_F},\ Q = P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}$
Endomorphisme dans une nouvelle base		$D = P^{-1}AP$ avec $D = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}'_E}(f),\ A = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E},\ P = P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}$

Stabilité du rang		Si $A \underset{\mathscr{L}}{\sim} B$ ou $A \underset{\mathscr{C}}{\sim} B$ alors $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B)$ $\mathrm{rg}\left(A^T\right) = \mathrm{rg}\,(A)$
Image et noyau		Si $A \underset{\mathscr{C}}{\sim} B$ alors $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\,(B)$ Si $A \underset{\mathscr{L}}{\sim} B$ alors $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(B)$
Théorème du rang		$\mathrm{rg}\,(A) + \dim\,(\mathrm{Ker}\,(A)) =$ nombre de colonnes
Caractérisation de l'inversibilité		A inversible $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}\,(A) = n$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\,(A) = \mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\,(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$