

Colle du 16/09 - Sujet 1
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1. Montrer que pour toute $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ il existe $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\int_0^1 h(t) dt = 0$ et $f = a + h$.

Exercice 2. Etudier la fonction $f : x \mapsto x - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Colle du 16/09 - Sujet 2
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + (-1)^n$.

Exercice 1. Etudier la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{2x^2 + 5x - 3}$.

Exercice 2. Soient $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$. Démontrer l'assertion suivante :

$$(\sqrt{a} \notin \mathbb{Q} \text{ OU } \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}).$$

Colle du 16/09 - Sujet 3
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Montrer que $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists! (g, h) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g$ paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1. Etudier la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{2e^x + 1}{e^x + 2}\right)$.

Exercice 2. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$. Montrer l'implication $(a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}) \Rightarrow (a = c \text{ ET } b = d)$.