Colle du 03/04 - Sujet 1
Intégrales à paramètre

Question de cours

1. Enoncer la caractérisation spectrale des matrices symétrique définie positive.
2. Montrer que $\psi : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0; 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0; 0) \end{cases}$, n'est pas $\mathscr{C}^1$.

Exercice 1. Soit $\varphi : x \mapsto \int_0^1 \frac{\ln(x+t)}{1+t} \, \mathrm{d}t$. Montrer que φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0; 1[$ et calculer sa dérivée.

Exercice 2. On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(tx) \, \mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F et montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur cet ensemble.
2. Montrer que F est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.
3. On admet que $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire F.

Colle du 03/04 - Sujet 2
Intégrales à paramètre

Question de cours

1. Définir une dérivée partielle d'ordre 1.
2. Montrer qu'une symétrie orthogonale est autoadjointe.

Exercice 1. Montrer que $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{x+t} \, \mathrm{d}t$ est continue sur $]0; +\infty[$.

Exercice 2. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(xt)}{\sin(t)} \, \mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition.