

**Colle du 05/02 - Sujet 1**  
**Systemes et continuité**

**Question de cours**

1. Définir une matrice inversible.
2. Montrer que si  $a \in I$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ , alors  $f(a) = l$ .

**Exercice 1.** Soit  $f : x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor)^2 + (\lfloor x \rfloor + 1 - x)^2$ . Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 2.** Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on pose  $A(a) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$ . On pose  $J = A(0)$ .

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $J^n$  puis en déduire  $A^n$ .
2. Montrer que si  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$  alors  $A$  est inversible. *On pourra chercher un inverse du type  $\alpha I_3 + \beta J$ .*
3. Montrer que  $J$  et  $A(3)$  ne sont pas inversibles.

**Colle du 05/02 - Sujet 2**  
**Systemes et continuité**

**Question de cours**

1. Que dire de l'image d'un intervalle par une fonction continue ?
2. Démontrer l'unicité de l'inverse d'une matrice.

**Exercice 1.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $(A + I_3)(A - 2I_3)$ . La matrice  $A$  est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse. Calculer les puissances de  $A$ .

**Exercice 2.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et décroissante. On dit que  $\alpha$  est un point fixe de  $f$  si et seulement si  $f(\alpha) = \alpha$ . Soit  $g : x \mapsto f(x) - x$ .

1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ .
2. En déduire que  $f$  possède un point fixe.
3. Montrer que ce point fixe est unique.

**Colle du 05/02 - Sujet 3**  
 **Systèmes et continuité**

**Question de cours**

1. Soit  $(S)$  un système et  $A$  la matrice inversible associée. Caractériser l'inversibilité de  $A$  à l'aide de  $(S)$ .
2. Montrer que si  $f$  admet une limite finie en  $a \in \mathbb{R}$  alors  $f$  est bornée sur un voisinage de  $a$ .

**Exercice 1.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . On dit que  $\alpha$  est un point fixe de  $f$  si et seulement si  $f(\alpha) = \alpha$ . On suppose que  $f$  n'admet aucun point fixe.

1. Montrer que  $g : x \mapsto f(x) - x$  est de signe constant.
2. En déduire que  $f \circ f$  n'admet aucun point fixe.

**Exercice 2.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $A + A^{-1} = I_n$ . Déterminer pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n + A^{-n}$ .