Colle du 03/02 - Sujet 1
Séries entières

Question de cours

1. Donner la série de Taylor et le lien avec une fonction développable en série entière.
2. Quelle opération laisse invariant le rayon de convergence ?

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sqrt{n}\right)^n x^n$.

Exercice 2. Déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto (1+x)\ln(1+x)$.

Colle du 03/02 - Sujet 2
Séries entières

Question de cours

1. Donner le série géométrique et la série exponentielle d'une variable complexe.
2. Enoncer une condition nécessaire de f développable en série entière et énoncé l'unicité associée.

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^3}{n!} x^n$ puis calculer la somme.

Colle du 03/02 - Sujet 3
Séries entières

Question de cours

1. Définir le disque ouvert de convergence.
2. Quel est le rayon de convergence d'une somme de séries entières ? Cas du produit de Cauchy ?

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+n}{2^n+n!} x^n$.

Exercice 2. Soient $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ et $F : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que f et F sont définies sur $\mathbb{R}$ et même développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
2. Préciser pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ puis en déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x)$.