Colle du 10/12 - Sujet 1
Théorème spectral et probabilités

Question de cours

1. Enoncer la continuité décroissante.
2. Montrer que si X et Y sont des vecteurs propres de A, matrice symétrique réelle, associés à des valeurs propres distinctes alors...

Exercice 1. Tracer la conique d'équation $x^2 + 6xy + y^2 + 4x = 0$.

Exercice 2. On admet que pour tout $x \in]-\infty; 1[$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$. Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir un pile. On note n le rang d'apparition du premier pile puis on lui fait tirer parmi n billets de loterie dont un seul est gagnant.

1. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?
2. Sachant que le joueur a gagné, quelle est la probabilité qu'il ait lancé 3 fois exactement la pièce ?

Colle du 10/12 - Sujet 2
Théorème spectral et probabilités

Question de cours

1. Définir une probabilité.
2. Démontrer la formule des probabilités totales.

Exercice 1. On possède deux dés A et B. Le dé A est équilibré et le B a une probabilité $1/3$ d'obtenir 6. On lance les deux dés successivement en commençant par le dé A et ce, une infinité de fois. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un 6.

Exercice 2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$.

1. Justifier que $A^T A$ est diagonalisable.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit orthogonal.

Colle du 10/12 - Sujet 3
Théorème spectral et probabilités

Question de cours

1. Enoncer le théorème spectral.
2. Si X est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p, alors $\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$.

Exercice 1. Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer si M est diagonalisable et déterminer les deux valeurs propres λ et μ de M.
2. Montrer qu'il existe p et q deux projecteurs tels que $\varphi = \lambda p + \mu q$, $p \circ q = 0$ et $p + q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$.

Exercice 2. Dans une usine, on sait que 5% des pièces sont défectueuses. On contrôle aléatoirement un lot de pièce. On note b la probabilité qu'une pièce soit contrôlée. On observe que parmi les pièces contrôlées, 17% des pièces sont défectueuses. On note p la probabilité qu'une pièce non contrôlée soit défectueuse. Quelle est la plus petite valeur de b pour laquelle $p \leqslant 0,01$?